Prof. Giuseppe Ascia

Espressioni minime mediante il metodo di Quine-Mc Cluskey

Implicanti

Date due funzioni $f(x_1,x_2,..,x_n)$ e $g(x_1,x_2,..,x_n)$ si dice che f copre g (oppure g implica f) e si scrive $f \supset g$ se $f(x_1,x_2,..,x_n) = 1$ quando $g(x_1,x_2,..,x_n) = 1$

a	b	f(a,b)	g(a,b)
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Se P è il prodotto di letterali e f copre P, si dice che P è un *implicante* di f.

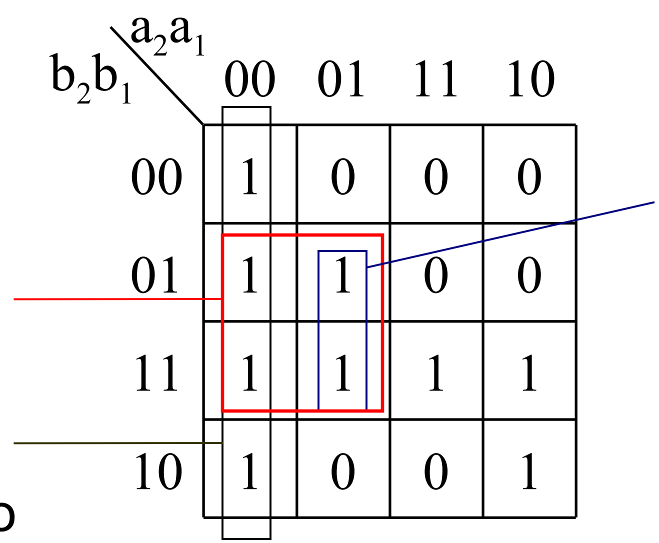
P= ab’ è un implicante di f

Implicanti primi

Si chiama *implicante primo* di una funzione f un implicante di f che non è coperto da un altro implicante di f con meno letterali.

$a_2'b_1$ è un implicante primo

$a_2'a_1'$ è un implicante primo



$a_2'a_1b_1$ è un implicante coperto da $a_2'b_1$

Implicanti

Teorema 1:
Ogni espressione SP non ridondante di una funzione f è la somma di implicanti primi di f.

Teorema2:
Una espressione minima SP di una funzione f è una espressione non ridondante.

Implicante primo essenziale:
Implicante primo che è l'unico a coprire almeno uno dei minterm coperti da f.

Gli implicanti primi essenziali devono comparire tutti in una qualunque espressione non ridondante di f.

Metodo di Quine-Mc Cluskey

- Metodo di minimizzazione tabellare
  - Facile da tradurre in un algoritmo.
  - Il numero di variabili trattare è teoricamente illimitato.
  - Facile da estendere al caso di funzioni a più di una uscita.

- Consiste di due fasi:
  - Ricerca degli implicanti primi;
  - Ricerca della copertura ottima.

Poiché queste due fasi hanno complessità esponenziale è praticamente impossibile trovare la soluzione ottima per un numero di variabili che supera l'ordine di una decina.

Metodo di Quine-Mc Cluskey

L'insieme di implicanti primi di una funzione f è ottenuta applicando ripetutamente, in tutti i modi possibili, la semplificazione

$$x_iP+x_i'P = P$$

dove P è un prodotto di letterali scelti tra $x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n$ in forma diretta o negata.

L'insieme di implicanti è ottenuto partendo dai minterm della funzione.

Le semplificazioni vengono applicate ai termini che differiscono in una sola posizione.

Metodo di Quine-Mc Cluskey

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Punto di partenza

x	y	z	
0	0	0	
0	1	1	√
1	0	1	√
1	1	1	√

x	y	z
-	1	1
1	-	1

Nessuna riduzione

1. Si confrontano esaustivamente tutti i termini prodotto (ricavati dal passo precedente);

   Si semplificano i termini che differiscono in una sola posizione;

   Si marcano i termini semplificati per indicare che gli implicanti non sono primi.

Metodo di Quine-Mc Cluskey

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Punto di partenza

x	y	z	
0	0	0	
0	1	1	√
1	0	1	√
1	1	1	√

x	y	z
-	1	1
1	-	1

Nessuna riduzione

1. Si crea un nuovo insieme di termini prodotto da confrontare e si ripete il passo 1.

Il processo ha termine quando non ci sono elementi da semplificare

Metodo di Quine-Mc Cluskey

Prof. Giuseppe Ascia

Per ridurre il numero di confronti, i termini vengono divisi in gruppi con elementi aventi lo stesso numero di 1.

I confronti vengono svolti solo tra termini relativi a gruppi che differiscono per un solo 1.

Ad ogni termine associamo un etichetta che rappresenta l'insieme di mintermine che esso ricopre.

a	b	c	d	
0	0	0	0	0
0	0	1	0	2
0	1	0	0	4
0	0	1	1	3
0	1	1	0	6
1	1	0	0	12
0	1	1	1	7
1	1	1	0	14

← Etichetta

Vengono confrontati i gruppi

0 e 1

1 e 2

2 e 3

Metodo di Quine-Mc Cluskey

I passi da seguire per individuare gli implicanti primi sono i seguenti:

1) Si suddividono i minterm in gruppi G_i^0 contenenti termini con i 1

   Ciascun minterm è etichettato con l'intero equivalente.

2) Partendo dal gruppo di indice i minimo, fino all'indice massimo –1, vengono confrontati i termini dei gruppo G_i^k con quelli del gruppo G_{i+1}^k.

Metodo di Quine-Mc Cluskey

Se due termini differiscono solo nella posizione j, essi vengono combinati in un unico termine che viene inserito in un nuovo gruppo G_i^{k+1}.

- In posizione j viene inserito un trattino "-".
- I due termini vengono spuntati per indicare che non sono implicanti primi
- L'etichetta di questo nuovo termine è ottenuto concatenando le etichette dei termini di partenza.

3) Se sono possibili altre combinazioni, k è incrementato e si ritorna al passo 2)

Esempio

$f(a,b,c,d)=\Sigma(1,9,11,12,13,14,15)$

G_1^0	0001	1	√
G_2^0	1001	9	√
	1100	12	√
G_3^0	1011	11	√
	1101	13	√
	1110	14	√
G_4^0	1111	15	√

G_1^1	-001	1,9	
G_2^1	10-1	9,11	√
	1-01	9,13	√
	110-	12,13	√
	11-0	12,14	√
G_3^1	1-11	11,15	√
	11-1	13,15	√
	111-	14,15	√

G_2^2	1--1	9,11,13,15
	11--	12,13,14,15

Non sono ulteriormente riducibili

Implicanti Primi
P0(1,9): b' c' d
P1(9,11,13,15): a d
P2(12,13,14,15): a b

Esempio: comparatore (a<=b) 2 bit (0)

a2	a1	b2	b1	q
0	0	0	0	**1**
0	0	0	1	**1**
0	0	1	0	**1**
0	0	1	1	**1**
0	1	0	0	0
0	1	0	1	**1**
0	1	1	0	**1**
0	1	1	1	**1**
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	**1**
1	0	1	1	**1**
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

G_0^0	0	0	0	0	0
G_1^0	0	0	0	1	1
	0	0	1	0	2
G_2^0	0	0	1	1	3
	0	1	0	1	5
	0	1	1	0	6
	1	0	1	0	10
G_3^0	0	1	1	1	7
	1	0	1	1	11
G_4^0	1	1	1	1	15

Esempio: comparatore (a<=b) 2 bit (1)

Prof. Giuseppe Ascia

G_0^0	0	0	0	0	0	√
G_1^0	0	0	0	1	1	√
	0	0	1	0	2	√
G_2^0	0	0	1	1	3	√
	0	1	0	1	5	√
	0	1	1	0	6	√
	1	0	1	0	10	√
G_3^0	0	1	1	1	7	√
	1	0	1	1	11	√
G_4^0	1	1	1	1	15	√

G_0^1	0	0	0	-	0,1
	0	0	-	0	0,2
G_1^1	0	0	-	1	1,3
	0	-	0	1	1,5
	0	0	1	-	2,3
	0	-	1	0	2,6
	-	0	1	0	2,10
G_2^1	0	-	1	1	3,7
	-	0	1	1	3,11
	0	1	-	1	5,7
	0	1	1	-	6,7
	1	0	1	-	10,11
G_3^1	-	1	1	1	7,15
	1	-	1	1	11,15

Esempio: comparatore (a<=b) 2 bit (2)

G_0^1	0	0	0	-	0,1 √
	0	0	-	0	0,2 √
G_1^1	0	0	-	1	1,3 √
	0	-	0	1	1,5 √
	0	0	1	-	2,3 √
	0	-	1	0	2,6 √
	-	0	1	0	2,10 √
G_2^1	0	-	1	1	3,7 √
	-	0	1	1	3,11 √
	0	1	-	1	5,7 √
	0	1	1	-	6,7 √
	1	0	1	-	10,11 √
G_3^1	-	1	1	1	7,15 √
	1	-	1	1	11,15 √

G_0^2	0	0	-	-	0,1,2,3
G_1^2	0	-	-	1	1,3,5,7
	0	-	1	-	2,3,6,7
	-	0	1	-	2,10,3,11
G_2^2	-	-	1	1	3,7,11,15

Implicanti Primi

P0(0,1,2,3): a2'a1'
P1(1,3,5,7): a2'b1
P2(2,3,6,7): a2'b2
P3(2,3,10,11): a1'b2
P4(3,7,11,15): b2b1

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Essa viene realizzata mediante la tabella degli implicanti primi.

La tabella degli implicanti primi è una matrice binaria dove:

- gli indici delle righe sono gli implicanti primi individuati;
- gli indici delle colonne sono i minterm della funzione;
- l’elemento $a_{i,j}$ della matrice assume il valore * (o 1) se il minterm della colonna j è coperto dall’implicante della riga i.

P0(1,9): b' c' d
P1(9,11,13,15): a d
P2(12,13,14,15): a b

	1	9	11	12	13	14	15
P0	*	*					
P1		*	*		*		*
P2				*	*	*	*

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Si utilizzano criteri di essenzialità e dominanza per ridurre la complessità del problema.

Criterio di Essenzialità

È un criterio di scelta (aumenta l'insieme di copertura) e, di conseguenza, di semplificazione poiché identifica ed estrae gli implicanti primi essenziali;

Criterio di Dominanza

È un criterio di sola semplificazione poiché riduce la dimensione dalla tabella di copertura eliminando righe (implicanti/mintermini) o colonne (mintermini) senza operare alcuna scelta

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Prof. Giuseppe Ascia

Criterio di Essenzialità:

Se una colonna contiene un solo 1, la riga che gli corrisponde è relativa ad un implicante primo essenziale (riga essenziale).

La riga essenziale e le colonne da essa coperte vengono eliminate dalla tabella. All'insieme di copertura viene aggiunto l'implicante identificato

	1	9	12	13	15	21	23	25
P0	*	*						*
P1		*			*	*		
P2			*	*	*			*
P3	*		*		*		*	
P4	*	*		*		*		

Insieme di copertura: ∅

	9	13	21	25
P0	*			*
P1	*		*	
P2		*		*
P4	*	*	*	

Insieme di copertura: { P3 }

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Prof. Giuseppe Ascia

Criterio di dominanza di riga:

Un implicante i-esimo domina un implicante j-esimo quando P_i copre almeno tutti i mintermini coperti da P_j

P_j è eliminato dalla tabella (eliminazione della riga).

	9	13	21	25
P0	*			*
~~P1~~	~~*~~		~~*~~	
P2		*		*
P4	*	*	*	

	9	13	21	25
P0	*			*
P2		*		*
P4	*	*	*	

P4 domina P1

Insieme di copertura: { P3 }

Insieme di copertura: { P3 }

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Prof. Giuseppe Ascia

- L'eliminazione di una riga può generare dei nuovi implicanti essenziali;
- Le righe ad essi associate vengono chiamate righe essenziali secondarie (implicanti primi secondari).

	9	13	21	25
P0	*			*
P2		*		*
P4	*	*	*	

Insieme di copertura: { P3 }

	25
P0	*
P2	*

Insieme di copertura: { P3, P4 }

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Dominanza tra colonne:

Un mintermine i-esimo domina un mintermine j-esimo quando ogni implicante che copre m_j copre anche m_i

m_i è eliminato dalla tabella.

	9	13	21	25
P0	*			*
P1	*		*	
P2		*		*
P4	*	*	*	

9 domina 21

Insieme di copertura: { P3 }

	13	21	25
P0			*
P1		*	
P2	*		*
P4	*	*	

Insieme di copertura: { P3 }

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Prof. Giuseppe Ascia

Quando tutte le righe essenziali e le colonne e righe dominate sono rimosse, la tabella ottenuta, se esiste, è ciclica: *tabella ciclica degli implicanti primi*.

Per scegliere gli implicanti si può effettuare una scelta arbitraria ed esaminare le conseguenze derivanti da tale scelta (branch and bound) e dalle sue alternative oppure il procedimento di Petrick.

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima: Petrick

Prof. Giuseppe Ascia

	0	2	10	14
P0	*	*		
P1		*		*
P2			*	*
P3	*		*	

Il significato della tabella di copertura è il seguente:
per rispettare la funzionalità (vincolo)
si deve coprire Il mintermine 0, mediante P0 OR mediante P3, AND
si deve coprire Il mintermine 2, mediante P0 OR mediante P1, AND
..

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima: Petrick

Prof. Giuseppe Ascia

Da un prodotto di somme $(P_0+P_3)*(P_0+P_1)*(P_2+P_3)*(P_1+P_2)=1$

$(P_0+P_3P_1)*(P_1P_3+P_2)=1$

$\Downarrow$

A somme di prodotti $P_0\, P_2+P_3P_1=1$

Gruppi di implicanti primi:

$P_0\, P_2$ P_3P_1;

Branch and bound

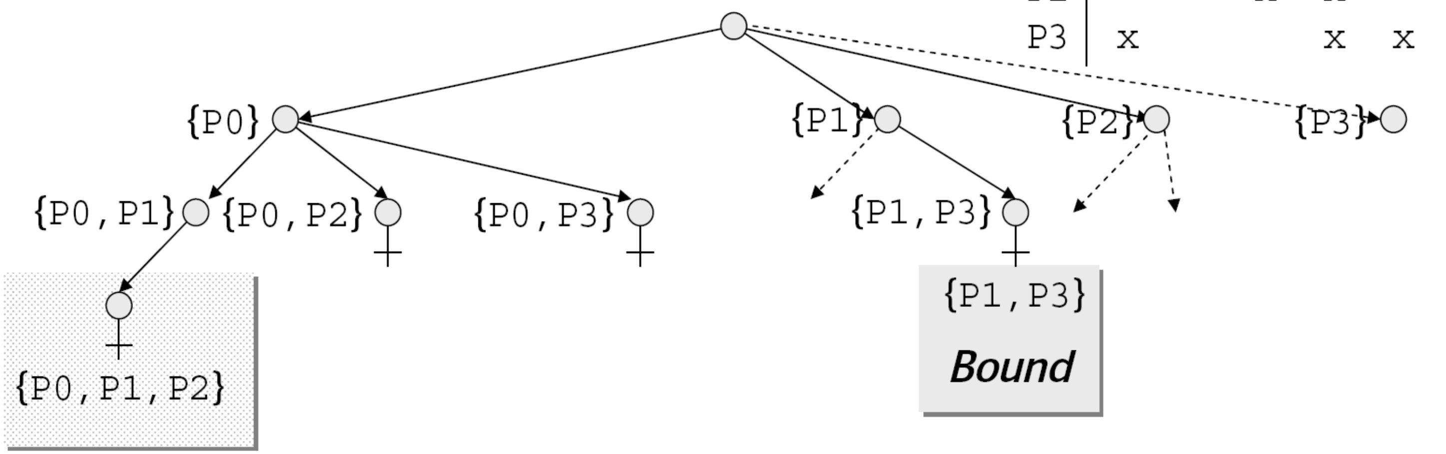
1. Si sceglie un implicante primo *Pi* come appartenente alla soluzione e si elimina la riga corrispondente e le colonne coperte da *Pi* dalla tabella di copertura
2. La tabella ridotta viene esaminata per altre possibili semplificazioni (righe essenziali o relazioni di dominanza) che possono portare direttamente ad una soluzione finale *Si* di costo *Ci*
3. Se la tabella ottenuta dalle semplificazioni, non è riducibile si sceglie un secondo implicante Pj tra quelli rimasti (considerando quindi come possibile copertura parziale la coppia {Pi,Pj}) iterando il procedimento di semplificazione e così via fino a coprire la funzione a costo Ci

Branch and bound

Prof. Giuseppe Ascia

4. Una volta individuata una soluzione si risale nell'albero, per esaminare le scelte rimaste
5. Si mantiene sempre la soluzione a costo minore (bound) e si confronta il costo ottenuto con il costo minore, quando lo si supera quella soluzione viene abbandonata

	A	B	C	D	E
P0	x	x			
P1		x	x		x
P2			x	x	
P3	x			x	x



Metodo di Quine-Mc Cluskey: funzioni non completamente specificate

Prof. Giuseppe Ascia

Ricerca degli implicanti primi:

Nel passo relativo alla generazione degli implicanti primi, le condizioni di indifferenza sono trattate come 1.

Ricerca della copertura ottima:

Nella tabella di copertura compaiono, come indici di colonna, solo i mintermini relativi agli 1 della funzione

Metodo di Quine-Mc Cluskey: funzioni non completamente specificate

Prof. Giuseppe Ascia

$f(a,b,c,d)= \Sigma(0,2,12,13)+d(4,5)$

0000	0	√
0010	2	√
0100	4	√
0101	5	√
1100	12	√
1101	13	√

00-0	0,2	
0-00	0,4	
010-	4,5	√
-100	4,12	√
-101	5,13	√
110-	12,13	√

-10- 4,5,12,13

$P_0(0,2)$: a'b'd'

$P_1(0,4)$: a'c'd'

$P_2(4,5,12,13)$: bc'

	0	2	12	13
P_0	*	*		
P_1	*			
P_2			*	*

P_0 e P_2 sono essenziali

$f(a,b,c,d) =$ a'b'd'+bc'