

Esempi di minimizzazione mediante il metodo di Quine McCluskey

$$f(a,b,c,d)=\Sigma(0,1,4,5,13,14)$$

Prof. Giuseppe Ascia

G_0^0	0000	0	✓
	<hr/>		
	0001	1	✓
G_1^0	0100	4	✓
	<hr/>		
G_2^0	0101	5	✓
	<hr/>		
G_3^0	1101	13	✓
	1110	14	

	000-	0,1	✓
G_0^1	0-00	0,4	✓
	<hr/>		
G_1^1	0-01	1,5	✓
	<hr/>		
	010-	4,5	✓
	<hr/>		
G_2^1	-101	5,13	

$$G_0^2 \quad 0-0- \quad 0,1,4,5$$

Il termine 14 non è
riducibile, è un
implicante primo

Il termine 5,13 non è
riducibile, è un
implicante primo

Il termine 0,1,4,5 non è
riducibile, è un
implicante primo

Gli implicanti primi della f sono:

$$P_0(14)=abcd'$$

$$P_1(5,13)=bc'd$$

$$P_2(0,1,4,5)=a'c'$$

$$f(a,b,c,d)=\Sigma(0,1,4,5,13,14)$$

Prof. Giuseppe Ascia

	0	1	4	5	13	14
P0						*
P1				*	*	
P2	*	*	*	*		

P0 è essenziale poiché è l'unico a coprire 14

P1 è essenziale poiché è l'unico a coprire 13

P2 è essenziale poiché è l'unico a coprire 0,1,4

$$f(a,b,c,d)=P0+P1+P2= abcd'+ bc'd+ a'c'$$

$$f(a,b,c,d)=\Sigma(0,2,4,5,6,7,8,9,13,15)$$

Prof. Giuseppe Ascia

G_0^0 <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0000</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0010</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> </table>	0000	0	√	0010	2	√	G_0^1 <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">00-0</td><td style="padding: 2px;">0,2</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0-00</td><td style="padding: 2px;">0,4</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-000</td><td style="padding: 2px;">0,8</td><td style="padding: 2px;"></td></tr> </table>	00-0	0,2	√	0-00	0,4	√	-000	0,8		G_0^2 <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0--0</td><td style="padding: 2px;">0,2,4,6</td></tr> </table>	0--0	0,2,4,6
0000	0	√																	
0010	2	√																	
00-0	0,2	√																	
0-00	0,4	√																	
-000	0,8																		
0--0	0,2,4,6																		
G_1^0 <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0100</td><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">1000</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> </table>	0100	4	√	1000	8	√	G_1^1 <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0-10</td><td style="padding: 2px;">2,6</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">010-</td><td style="padding: 2px;">4,5</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">01-0</td><td style="padding: 2px;">4,6</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> </table>	0-10	2,6	√	010-	4,5	√	01-0	4,6	√	G_1^2 <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">01--</td><td style="padding: 2px;">4,5,6,7</td></tr> </table>	01--	4,5,6,7
0100	4	√																	
1000	8	√																	
0-10	2,6	√																	
010-	4,5	√																	
01-0	4,6	√																	
01--	4,5,6,7																		
G_2^0 <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0101</td><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0110</td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">1001</td><td style="padding: 2px;">9</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> </table>	0101	5	√	0110	6	√	1001	9	√	G_2^1 <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">100-</td><td style="padding: 2px;">8,9</td><td style="padding: 2px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">01-1</td><td style="padding: 2px;">5,7</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> </table>	100-	8,9		01-1	5,7	√	G_2^2 <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-1-1</td><td style="padding: 2px;">5,7,13,15</td></tr> </table>	-1-1	5,7,13,15
0101	5	√																	
0110	6	√																	
1001	9	√																	
100-	8,9																		
01-1	5,7	√																	
-1-1	5,7,13,15																		
G_3^0 <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0111</td><td style="padding: 2px;">7</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">1101</td><td style="padding: 2px;">13</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> </table>	0111	7	√	1101	13	√	G_3^1 <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-101</td><td style="padding: 2px;">5,13</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">011-</td><td style="padding: 2px;">6,7</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">1-01</td><td style="padding: 2px;">9,13</td><td style="padding: 2px;"></td></tr> </table>	-101	5,13	√	011-	6,7	√	1-01	9,13				
0111	7	√																	
1101	13	√																	
-101	5,13	√																	
011-	6,7	√																	
1-01	9,13																		
G_4^0 <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">1111</td><td style="padding: 2px;">15</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> </table>	1111	15	√	G_3^1 <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-111</td><td style="padding: 2px;">7,15</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">11-1</td><td style="padding: 2px;">13,15</td><td style="padding: 2px;">√</td></tr> </table>	-111	7,15	√	11-1	13,15	√									
1111	15	√																	
-111	7,15	√																	
11-1	13,15	√																	

Implicanti primi

Implicanti Primi: P0(0,8)= a'b'c' P1(8,9)=ab'c' P2(9,13)=ac'd
P3(0,2,4,6)=a'd' P4(4,5,6,7)=a'b P5(5,7,13,15)=bd

$$f(a,b,c,d)=\Sigma(0,2,4,5,6,7,8,9,13,15)$$

Prof. Giuseppe Ascia

	0	2	4	5	6	7	8	9	13	15
P0	*						*			
P1							*	*		
P2								*	*	
P3	*	*	*		*					
P4			*	*	*	*				
P5				*		*			*	*

P3 è essenziale poiché è l'unico a coprire 2

P5 è essenziale poiché è l'unico a coprire 15

Vengono eliminate le righe P3 e P5

Insieme iniziale di copertura={P3,P5}

	8	9
P0	*	
P1	*	*
P2		*
P4		

P1 domina P0 e P2

Vengono eliminate

P0 e P2



	8	9
P1	*	*

Insieme di copertura {P1,P3,P5}

$$f(a,b,c,d)=P1+P3+P5= ab'c'+ a'd'+ bd$$

$$f(a,b,c,d)=\Sigma(0,2,8,10,11)+d(4,6,7)$$

Prof. Giuseppe Ascia

<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">G_0^0</td> <td style="padding: 5px;">0000</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">0010</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">G_1^0</td> <td style="padding: 5px;">0100</td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">1000</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">8</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">G_2^0</td> <td style="padding: 5px;">0110</td> <td style="padding: 5px;">6</td> <td style="padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">1010</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">10</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">G_3^0</td> <td style="padding: 5px;">0111</td> <td style="padding: 5px;">7</td> <td style="padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">1011</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">11</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">✓</td> </tr> </table>	G_0^0	0000	0	✓		0010	2	✓	G_1^0	0100	4	✓		1000	8	✓	G_2^0	0110	6	✓		1010	10	✓	G_3^0	0111	7	✓		1011	11	✓	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px;">00-0</td> <td style="padding: 5px;">0,2</td> <td style="padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">G_0^1 0-00</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">0,4</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">-000</td> <td style="padding: 5px;">0,8</td> <td style="padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">0-10</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">2,6</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">G_1^1 -010</td> <td style="padding: 5px;">2,10</td> <td style="padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">01-0</td> <td style="padding: 5px;">4,6</td> <td style="padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">10-0</td> <td style="padding: 5px;">8,10</td> <td style="padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">011-</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">6,7</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">G_2^1 101-</td> <td style="padding: 5px;">10,11</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	00-0	0,2	✓	G_0^1 0-00	0,4	✓	-000	0,8	✓	0-10	2,6	✓	G_1^1 -010	2,10	✓	01-0	4,6	✓	10-0	8,10	✓	011-	6,7		G_2^1 101-	10,11		<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">G_0^2</td> <td style="padding: 5px;">0--0</td> <td style="padding: 5px;">0,2,4,6</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">G_1^2</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">-0-0</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">0,2,8,10</td> </tr> </table> <p style="text-align: center; margin-top: 20px;">Implicanti primi</p>	G_0^2	0--0	0,2,4,6	G_1^2	-0-0	0,2,8,10
G_0^0	0000	0	✓																																																																
	0010	2	✓																																																																
G_1^0	0100	4	✓																																																																
	1000	8	✓																																																																
G_2^0	0110	6	✓																																																																
	1010	10	✓																																																																
G_3^0	0111	7	✓																																																																
	1011	11	✓																																																																
00-0	0,2	✓																																																																	
G_0^1 0-00	0,4	✓																																																																	
-000	0,8	✓																																																																	
0-10	2,6	✓																																																																	
G_1^1 -010	2,10	✓																																																																	
01-0	4,6	✓																																																																	
10-0	8,10	✓																																																																	
011-	6,7																																																																		
G_2^1 101-	10,11																																																																		
G_0^2	0--0	0,2,4,6																																																																	
G_1^2	-0-0	0,2,8,10																																																																	

Implicanti Primi:

$$P0(6,7)= a'bc$$

$$P1(10,11)=ab'c$$

$$P2(0,2,4,6)=a'd'$$

$$P3(0,2,8,10)=b'd'$$

$$f(a,b,c,d)=\Sigma(0,2,8,10,11)+d(4,6,7)$$

Prof. Giuseppe Ascia

	0	2	8	10	11
P0					
P1				*	*
P2	*	*			
P3	*	*	*	*	

P0 non copre termini di Σ

P1 è essenziale poiché è l'unico a coprire 11

P3 è essenziale poiché è l'unico a coprire 8

Poiché P1 e P3 coprono tutti gli 1 di f, l'insieme di copertura è {P1,P3}

$$f(a,b,c,d)=P1+P3= ab'c+ b'd'$$

Esempio 1 di ricerca della copertura minima


Prof. Giuseppe Ascia

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
P1	*	*		*			
P2		*				*	
P3			*		*		*
P4	*	*				*	
P5		*		*	*	*	

P3 è essenziale poiché è l'unico a coprire M3 e M7.

Dalla tabella degli implicanti primi vengono eliminati P3 e gli Mi coperti da esso.

Insieme di copertura = {P3}



	M1	M2	M4	M6
P1	*	*	*	
P2		*		*
P4	*	*		*
P5		*	*	*

P4 domina P2

P2 può essere eliminato

Insieme di copertura = {P3}

Esempio 1 di ricerca della copertura minima

Prof. Giuseppe Ascia

	M1	M2	M4	M6
P1	*	*	*	
P4	*	*		*
P5		*	*	*

M2 domina gli altri mintermini

M2 può essere eliminato

Insieme di copertura = {P3}

	M1	M4	M6
P1	*	*	
P4	*		*
P5		*	*

La tabella degli impicanti primi è ciclica

Applicando Petrick abbiamo:

$$(P1+P4)*(P1+P5)(P4+P5)=1 \quad \text{ovvero}$$

$$P1P4+P5P4+P1P5=1$$

Se ad esempio P1 ha il maggior numero di letterali, la copertura sarà {P3,P4,P5}

Esempio 2 di ricerca della copertura minima

Prof. Giuseppe Ascia

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
P1	*	*				*
P2		*		*	*	
P3		*				*
P4			*		*	
P5	*			*		*

P4 è essenziale poiché è l'unico a coprire M3.

Dalla tabella degli implicanti primi vengono eliminati P4 e gli Mi coperti da esso.

Insieme di copertura = {P4}

	M1	M2	M4	M6
P1	*	*		
P2		*	*	
P3		*		*
P5	*		*	*

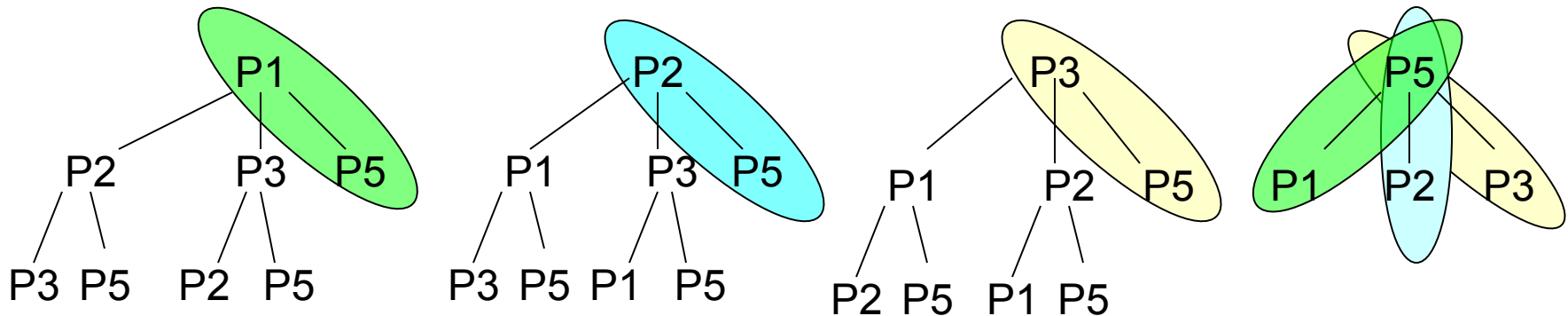
La tabella degli implicanti primi è ciclica

Insieme di copertura = {P4}

Esempio 2 di ricerca della copertura minima

Prof. Giuseppe Ascia

Applichiamo il metodo del branch & bound per trovare gli altri implicanti da aggiungere a P4



Se P1, P2 e P3 hanno uguale numero di letterali la copertura dovrà contenere oltre a P4, P5 e uno qualsiasi tra P1, P2 e P3.

In caso contrario, la copertura dovrà contenere, oltre a P4 e P5, l'implicante (tra P1, P2 e P3) con il minor numero di letterali.

Esempio 3 di ricerca della copertura minima

Prof. Giuseppe Ascia

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
P1	*	*				
P2				*	*	
P3			*			*
P4		*				*
P5	*		*		*	*

P2 è essenziale poiché è l'unico a coprire M4.

Dalla tabella degli implicanti primi vengono eliminati P2 e gli Mi coperti da esso.

Insieme di copertura = {P2}

	M1	M2	M3	M6
P1	*	*		
P3			*	*
P4		*		*
P5	*		*	*

P5 domina P3

P3 può essere eliminato

Insieme di copertura = {P2}

Esempio 3 di ricerca della copertura minima

Prof. Giuseppe Ascia

	M1	M2	M3	M6
P1	*	*		
P4		*		*
P5	*		*	*

P2 è un implicante essenziale secondario poiché è l'unico a coprire M3.

Dalla tabella degli implicanti primi vengono eliminati P5 e gli Mi coperti da esso.

Insieme di copertura = {P2, P5}

	M2
P1	*
P4	*

Se P1 e P4 hanno lo stesso numero di letterali, uno qualsiasi dei due può essere scelto.

Altrimenti, verrà scelto quello con il minor numero di letterali.