Minimizzazione degli stati in una rete sequenziale sincrona

Sintesi di Reti Sequenziali Sincrone

Il procedimento generale di sintesi si svolge nei seguenti passi:

1. Realizzazione del diagramma degli stati a partire dalle specifiche del problema
2. Costruzione della tabella degli stati
3. Minimizzazione del numero degli stati
4. Codifica degli stati interni
5. Costruzione della tabella delle transizioni
6. Scelta degli elementi di memoria
7. Costruzione della tabella delle eccitazioni
8. Sintesi sia della rete combinatoria che realizza la funzione stato prossimo sia di quella che realizza la funzione d'uscita

Minimizzazione del numero degli stati

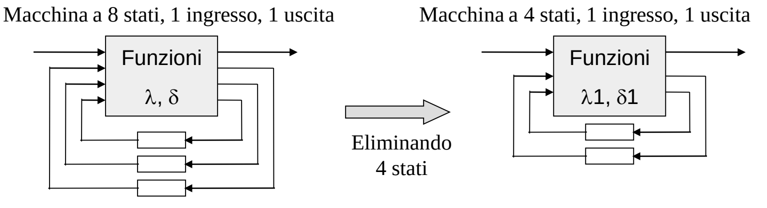
Il numero minimo di elementi di memoria necessari a memorizzare gli stati dell'insieme S è:

$N_{min}=\log_2 |S|$

Nel modello di una macchina a stati possono esistere degli stati ridondanti

L'identificazione ed eliminazione degli stati ridondanti comporta:

- Reti combinatorie meno costose
- Minori elementi di memoria



Minimizzazione del numero degli stati

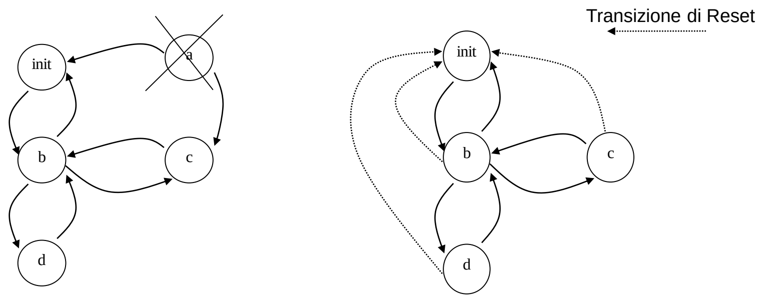
Obiettivo della riduzione del numero degli stati è l'individuazione di una macchina minima equivalente, ovvero funzionalmente equivalente e con il minimo numero di stati.

La riduzione viene realizzata in due fasi:

- Eliminazione degli stati non raggiungibili dallo stato iniziale
- Identificazione degli stati :
  - Equivalenti, per le macchine completamente specificate
  - Compatibili, per le macchine non completamente specificate

Eliminazione degli stati irraggiungibili

Uno stato è irraggiungibile se non esiste alcuna sequenza di transizione di stato che porti dallo stato iniziale in tale stato.



Minimizzazione di macchine completamente specificate

Siano:

- I_α una sequenza d' ingresso $i_j, \ldots, i_k$
- U_α, sequenza d'uscita ad essa associata ottenuta attraverso λ
- s_i, s_j due generici stati

Due stati s_i e s_j appartenenti ad S sono *indistinguibili* se:

$U_{\alpha,i}=L(s_i, I_\alpha) = L(s_j, I_\alpha) = U_{\alpha,j} \quad \forall\ I_\alpha$

L'indistinguibilità tra s_i e s_j si indica con $s_i \sim s_j$

La relazione di indistinguibilità gode di tre proprietà:

Riflessiva: $s_i \sim s_i$

Simmetrica: $s_i \sim s_j \leftrightarrow s_j \sim s_i$

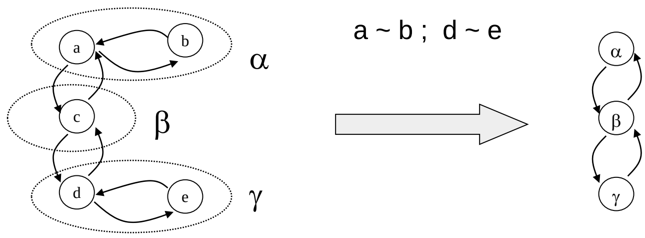
Transitiva: $s_i \sim s_j \wedge s_j \sim s_k \rightarrow s_i \sim s_k$

Minimizzazione di macchine completamente specificate

Due stati indistinguibili sono equivalenti e possono essere sostituiti da un solo stato.

Un gruppo di stati tra loro equivalenti può essere raggruppato in un'unica classe.

L'insieme di classi individuate determina l'insieme di stati della macchina minima equivalente.



Minimizzazione di macchine completamente specificate

La definizione di indistinguibilità è di difficile applicabilità poiché richiederebbe di considerare tutte le sequenze di ingresso.

Regola di Paull-Unger:

Due stati sono s_i e s_j sono indistinguibili se e solo se per ogni simbolo di ingresso i_a:

- $\lambda(s_i,i_a)= \lambda(s_j,i_a)$ ovvero le uscite sono uguali per tutti i simboli d'ingresso
- $\delta(s_i,i_a)= \delta(s_j,i_a)$ ovvero gli stati prossimi sono indistinguibili

La regola è iterativa

Minimizzazione di macchine completamente specificate

	0	1
a	d/0	b/1
b	e/0	b/1
c	a/1	c/1
d	b/1	c/0
e	a/1	c/0

a e **b** hanno la stessa uscita
se gli stati futuri **d** ed **e** sono indistinguibili, **a ~ b**

d ed **e** hanno la stessa uscita
se gli stati futuri **a** ed **b** sono indistinguibili, **d ~ e**

a non è indistinguibile da **c**,**d** ed **e** poiché ha una differente uscita

Poiché l'indistinguibilità tra a e b dipende da quella tra d ed e e viceversa, possiamo concludere che
a ~ b, d ~ e

Le classi di indistinguibilità sono:
α={a,b} β={c}, γ={d,e}

Macchina minima equivalente

	0	1
α	γ /0	α /1
β	α /1	β /1
γ	α /1	β /0

Minimizzazione di macchine completamente specificate

Poiché gli insiemi I ed S hanno cardinalità finita, dopo un numero finito di passi si verifica una delle due condizioni:

- $s_i \sim s_j$ se i simboli d'uscita sono diversi o gli stati prossimi sono distinguibili
- $s_i \sim s_j$ se i simboli d'uscita sono uguali e gli stati prossimi sono indistinguibili

Minimizzazione di macchine completamente specificate

Le relazioni di indistinguibilità possono essere identificate mediante la **Tabella delle Implicazioni.**

Tale tabella :

- Mette in relazione ogni coppia di stati
- È triangolare (proprietà simmetrica) e priva di diagonale principale

Ogni elemento della tabella contiene:

- Il simbolo di non equivalenza (X) o di equivalenza (~)
- La coppia di stati a cui si rimanda la verifica, se non è possibile pronunciarsi sulla equivalenza degli stati corrispondenti.

S1	x		
S2	x	~	
S3	S1,S2	x	x
	S0	S1	S2

Minimizzazione di macchine completamente specificate

Analisi delle coppie degli stati

Per ogni coppia di stati:

- Se è marcata come equivalente non è richiesta una ulteriore verifica
- Se si rimanda ad un'altra coppia:
  1. se questi stati sono equivalenti anche gli stati della coppia in esame sono equivalenti;
  2. se questi sono non equivalenti anche gli stati della coppia in esame sono non equivalenti;
  3. se gli stati della coppia cui si rimanda dipendono da una coppia ulteriore si ripete il procedimento in modo iterativo

L'analisi termina quando non sono più possibili eliminazioni

Le coppie rimaste sono equivalenti

Minimizzazione di macchine completamente specificate

	0	1
a	g/0	e/1
b	c/0	a/1
c	e/1	g/0
d	b/0	e/1
e	g/0	a/1
f	d/1	f/0
g	a/1	g/0

	a	b	c	d	e	f
b	cg ae					
c	x	x				
d	bg	bc ae	x			
e	~	cg	x	bg ae		
f	x	x	de fg	x	x	
g	x	x	ae	x	x	ad

Minimizzazione di macchine completamente specificate

Analisi delle coppie degli stati

	a	b	c	d	e	f
b	cg ae					
c	x	x				
d	bg	bc ae	x			
e	~	cg	x	bg ae		
f	x	x	de fg	x	x	
g	x	x	ae	x	x	ad

b-a: c-g è indistinguibile se lo è a-e → b~a

d-a: b-g è distinguibile → d≁a

d-b: b-c è distinguibile → d≁b

e-b: c-g è indistinguibile se lo è a-e → b~e

e-d: b-g è distinguibile → e≁d

f-c: d-e è indistinguibile se lo è b-g → f≁c

g-c: a-e è indistinguibile → g~c

g-f: a-d è indistinguibile se lo è b-g → g≁f

Minimizzazione di macchine completamente specificate

b	~					
c	x	x				
d	x	x	x			
e	~	~	x	x		
f	x	x	x	x	x	
g	x	x	~	x	x	x
	a	b	c	d	e	f

Classi di indistinguibilità

α={a,b,e}

β ={c,g}

γ ={d}

δ ={f}

Tabella degli stati minima equivalente

	0	1
α	β /0	α /1
β	α /1	β /0
γ	α /0	α /1
δ	γ /1	δ /0

Macchine non completamente specificate

Sono macchine in cui per alcune configurazioni degli ingressi e stati correnti non sono specificati gli stati futuri e/o le configurazioni d'uscita

Una sequenza di ingresso si dice applicabile

se per ogni simbolo d'ingresso della sequenza, tranne al più l'ultimo, la funzione stato prossimo è specificata.

Due stati s_i e s_j si dicono compatibili ($s_i \approx s_j$)

se partendo da s_i e da s_j, usando ogni possibile sequenza di ingresso applicabile, si ottengono le stesse sequenze d'uscita ovunque queste siano specificate.

Macchine non completamente specificate

La compatibilità è una relazione meno forte di quella di indistinguibilità, non vale la proprietà transitiva.

	0	1
a	a /1	a /1
b	a /-	a /-
c	a /0	a /0

$a \approx b;\ b \approx c$ $\qquad a \not\approx c$

La regola di Paull-Unger è stata estesa per trattare il caso di macchine non completamente specificate.

Due stati sono compatibili se e solo se, per ogni simbolo di ingresso valgono le due seguenti relazioni:

- $\lambda(s_i,i_a) = \lambda(s_j,i_a)$ ovunque sono entrambi specificati
- $\delta(s_i,i_a) \approx \delta(s_j,i_a)$ ovunque sono entrambi specificati

Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Poiché gli insiemi I ed S hanno cardinalità finita, dopo un numero finito di passi si verifica una delle due condizioni:

- $s_i \approx s_j$ se
  - i simboli d'uscita sono diversi
  - gli stati prossimi sono stati verificati come non compatibili
- $s_i \approx s_j$ se
  - i simboli d'uscita sono uguali
  - gli stati prossimi sono stati verificati come compatibili
  - gli stati prossimi sono stati parte della sequenza di controllo

Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Le relazioni di compatibilità possono essere identificate mediante la **Tabella delle Implicazioni**

Ogni elemento della tabella contiene:

- Il simbolo di non compatibilità (X) o di compatibilità (≈)
- La coppia di stati a cui si rimanda la verifica, se non è possibile pronunciarsi sulla compatibilità degli stati corrispondenti.

La relazione di compatibilità non è transitiva

- I vincoli vanno mantenuti anche nelle successive fasi di minimizzazione
- Non si può immediatamente concludere che tutte le compatibilità siano soddisfatte
- È necessaria un'ulteriore analisi della tabella delle implicazioni

Minimizzazione di macchine non completamente specificate

	0	1
a	e/0	a/0
b	d/0	b/0
c	e/-	c/-
d	a/1	a/1
e	a/-	b/-

b	de			
c	≈	de		
d	x	x	ae ac	
e	ab	~~ad~~	ae bc	ab
	a	b	c	d

Vincoli

$a \approx b$ se $d \approx e$

$a \approx e$ se $a \approx b$

$b \approx c$ se $d \approx e$

$b \approx e$ se $a \approx d$ $\rightarrow b \not\approx e$

$c \approx d$ se $a \approx e$, $a \approx c$

$c \approx e$ se $a \approx e$, $b \approx c$

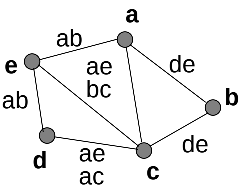
$d \approx e$ se $a \approx b$

Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Grafo di Compatibilità (GdC)

- I nodi corrispondono agli stati
- Due nodi n_i e n_j sono tra loro collegati se gli stati ad essi associati sono compatibili o la loro compatibilità dipende dalla compatibilità del loro stato prossimo.
- Per ogni arco devono essere riportati i vincoli sulla compatibilità degli stati prossimi

b	de			
c	≈	de		
d	x	x	ae ac	
e	ab	x	ae bc	ab
	a	b	c	d

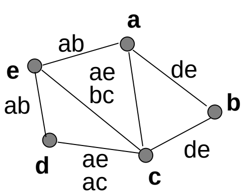


Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Classe di compatibilità:

- Un insieme di stati compatibili tra loro a coppie.
- Sul GdC è rappresentata da un poligono completo
- Le classi di compatibilità tra stati non sono necessariamente disgiunte
- I seguenti insiemi sono classi di compatibilità

C0={a,b,c}
C1={a,c,e}
C2={c,d,e}
C3={a,b}
C4={b,c}
C5={a,c}
C6={a,e}
....



Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Classe di massima compatibilità:

Classe di compatibilità non contenuta in nessun altra classe

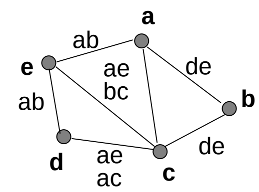
Sul GdC è individuata da un poligono completo non contenuto in nessun altro

I seguenti insiemi sono classi di massima compatibilità

C0={a,b,c}, con condizione <de>

C1={a,c,e}, con condizione <ab> e <ae,bc>

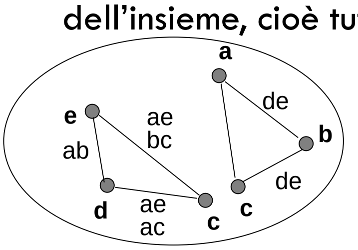
C2={c,d,e}, con condizione <ab>, <ae,ac> e <ae,bc>



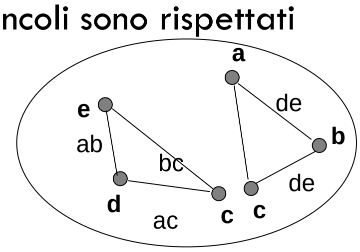
Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Insieme chiuso di classi di compatibilità:

- Per ogni classe dell'insieme tutti gli stati futuri ad essi relativi sono contenuti in almeno una classe dell'insieme, cioè tutti i vincoli sono rispettati



{a,b,c} e {c,d,e} non sono un insieme chiuso

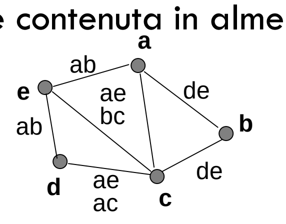


{a,b,c} e {c,d,e} sono un insieme chiuso

Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Copertura della tabella degli stati

Insieme di classi di compatibilità per cui ogni stato della tabella degli stati è contenuta in almeno una classe



Esempi di copertura

{ {a,b,c},{a,c,e},{c,d,e} }

{ {a,b},{b,c},{a,c,e,},{c,d,e} }

Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Minimizzare il numero degli stati significa:

- trovare il più piccolo insieme chiuso di classi di compatibilità che copre l'insieme di stati su cui la macchina è definita.

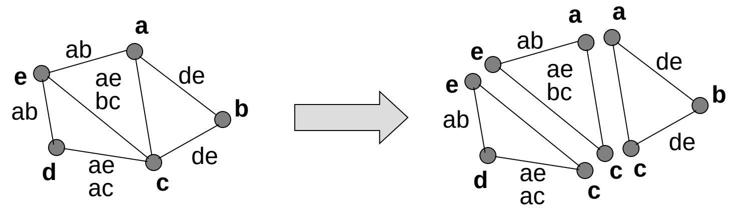
L'insieme di tutte le classi di massima compatibilità è chiuso e copre l'insieme degli stati della macchina.

Se si associa uno stato ad ogni classe di massima compatibilità si ottiene una nuova macchina con un numero di stati:

- Possibilmente minore di quello di partenza
- Non necessariamente minimo

Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Ricerca delle classi di massima compatibilità



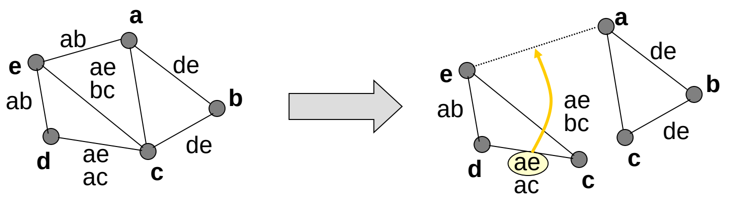
Una copertura ammissimile è dall'insieme delle classi di massima compatibilità:

α={a,b,c} β ={a,c,e} γ ={c,d,e}

Tale copertura non è minima.
Le classi di questa copertura condividono diversi stati

Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Nella precedente copertura gli stati {a,c,e} sono già coperti dalle altre due classi

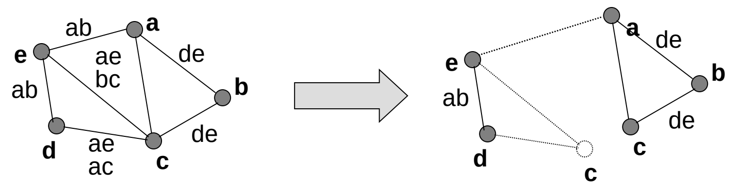


La copertura ottenuta α={a,b,c} , β ={c,d,e} non forma un insieme chiuso in quanto non è rispettato il vincolo **ae** da cui dipende d≈c.

ae non è contenuto né in α né in β

Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Poiché lo stato **c** è già coperto dalla classe α possiamo escluderlo da β



La copertura ottenuta α={a,b,c} , β ={d,e} forma un insieme chiuso

Tabella degli stati

	0	1
a	e/0	a/0
b	d/0	b/0
c	e/-	c/-
d	a/1	a/1
e	a/-	b/-

Classi di massima compatibilità

α={a,b,c}
β ={d,e}

Tabella degli stati ridotta

	0	1
α	β /0	α/0
β	α /1	α /1

Algoritmo greedy per la minimizzazione

1) si scegli una classe massima di compatibilità a cui si associa uno stato della macchina minimale
2) si rimuovono dal grafo di compatibilità tutti i nodi di questa classe (e i relativi archi) se non implicano la violazione di vincoli di compatibilità
3) se il grafo contiene ancora poligoni si torna al punto 1.