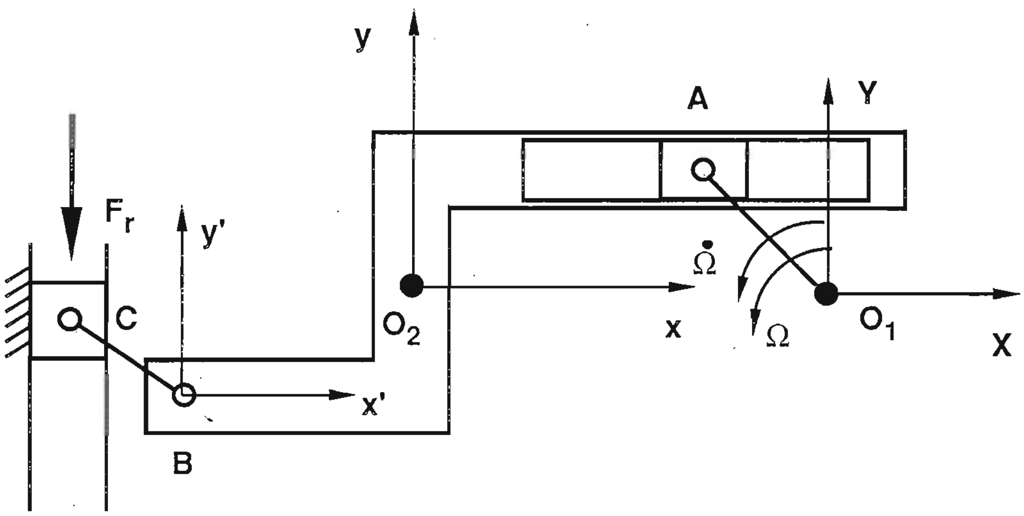
Sia dato il seguente sistema articolato, disposto in un piano verticale, costituito da cinque membri rigidi collegati solo da coppie elementari od inferiori, e precisamente:

1) la manovella AO_1 incernierata da un lato nel punto O_1 a telaio, e da un altro, nel punto A, con il pattino del glifo;
2) il pattino A traslante nella guida del glifo;
3) il glifo rotante intorno al punto fisso O_2;
4) l'asta BC incernierata da un lato nel punto B del glifo, e da un altro, nel punto C, di un pattino;
5) il pattino C traslante verticalmente ed al quale è applicata una forza resistente F_r passante per C;
6) il telaio, rappresentato dalle sedi fisse delle due cerniere O_1 ed O_2.



Pertanto, essendo il sistema dotato di moto piano, si può applicare la formula per la determinazione del numero di gradi di libertà già riportata nell'Esercizio 1, che nel nostro caso diventa:

$$l = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 7 - 0 = 1$$

Come parametro lagrangiano indipendente si può scegliere l'angolo che l'asta AO_1 forma con l'asse X.

L'asta AO_1 è dotata di velocità angolare Ω e di accelerazione angolare $\dot{\Omega}$ entrambe antiorarie; sono inoltre note le masse dei due pattini o corsoi (m_a e m_c) ed i momenti d'inerzia dell'asta AO_1 (J_1) rispetto al punto O_1 e del glifo (J_g) rispetto al punto O_2 che coincide con il baricentro; viene considerata la presenza dell'attrito solo nell'accoppiamento tra il pattino C e la guida fissa, indicando con f_r il relativo coefficiente d'attrito cinetico o radente.

Si richiede la coppia C_m da applicare all'asta AO_1 per ottenere l'equilibrio dinamico del cinematismo in questa configurazione del sistema.

Per l'analisi cinematica la terna cartesiana fissa è stata posta con origine in O_1 ed assi orizzontale e verticale, rispettivamente X ed Y; si è posta, inoltre, una prima terna mobile, di assi x ed y ed origine nel punto fisso O_2, rotante solidalmente con il glifo ed una seconda terna mobile, di assi x' ed y', con origine nel punto B, dotata, al contrario, di moto puramente traslatorio.

Si può, innanzitutto, applicare il bilancio energetico a tutto il sistema in esame al fine di determinare l'incognita coppia motrice:

$$W_m + W_r + W_p + W_i = 0$$

Nel nostro caso risulta:[1]

$$W_m = \mathbf{C_m} \times \mathbf{\Omega} = C_m \cdot \Omega$$

$$W_r = \mathbf{F_r} \times \mathbf{v_C} + m_a \mathbf{g} \times \mathbf{v_A} + m_c \mathbf{g} \times \mathbf{v_C}$$

$$W_p = \mathbf{T} \times \mathbf{v_C} = - T \cdot v_C$$

$$W_i = - J_1 \dot{\Omega} \times \Omega - m_a \mathbf{a_A} \times \mathbf{v_A} - J_g \dot{\Omega}_g \times \Omega_g - m_c \mathbf{a_C} \times \mathbf{v_C}$$

---

[1] Nel seguito le grandezze vettoriali verranno sempre riportate in neretto.

Sostituendo i valori delle quattro potenze nell'equazione del bilancio si ottiene un'equazione in cui compaiono, oltre all'incognita del problema C_m, la componente d'attrito T, tra guida e pattino, e varie grandezze cinematiche relative a punti significativi del sistema, che di seguito vengono determinate in via grafica per questa configurazione istantanea del sistema articolato.

Tale sola equazione, ovviamente, non permetterà di risolvere il quesito posto.

La velocità assoluta del punto A, si determina considerando A appartenete alla manovella AO_1, manovella che ruota con velocità angolare Ω intorno al punto fisso O_1, pertanto essa è un vettore ortogonale all'asta AO_1, raggio cinematico, ottenibile dal prodotto vettoriale:

$$\mathbf{v_A} = \Omega \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{O_1})$$

il cui modulo vale:

$$v_A = \Omega \cdot A\, O_1$$

Dopo aver analizzato la velocità assoluta del punto A, si può pensare il punto A appartenete sia al pattino che al glifo ed applicando il principio dei moti relativi, si può scrivere la seguente equazione vettoriale relativa alla velocità del punto A:[2]

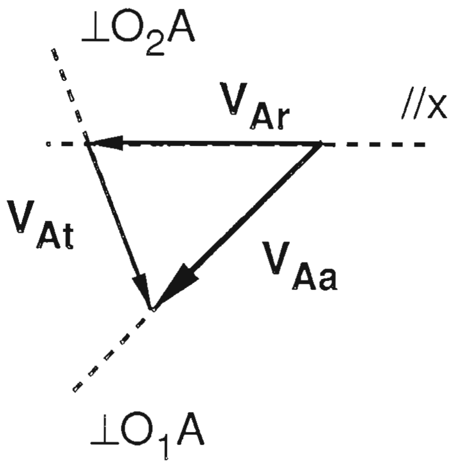
$$\mathbf{v_{Aa}} = \mathbf{v_{At}} + \mathbf{v_{Ar}}$$

[2] Il moto relativo del punto A, moto che si ottiene considerando bloccata in questo istante la terna mobile rotante x-y, è una traslazione di direzione x lungo la guida del glifo; il moto di trascinamento è, invece, dato dalla rotazione della terna mobile x-y, con il punto A ad essa solidale, intorno al punto fisso O_2, rotazione che coincide con quella del glifo.

Costruiamo ora la seguente tabellina esplicativa:

	v_{Aa} =	v_{At}	v_{Ar} +
mod.	$\Omega \cdot O_1A$	$\Omega_g \cdot O_2A$	v_{Ar}
dir.	$\perp O_1A$	$\perp O_2A$	// x
	noto compl.	nota dir.	nota dir.

la relativa costruzione grafica ci permette di ricavare i vettori incogniti $\mathbf{v}_{Ar}$ e $\mathbf{v}_{At}$



La conoscenza dei moduli di questi vettori ci consente di determinare la velocità angolare del glifo:

$$\Omega_g = \frac{v_{At}}{O_2A}$$

che risulta oraria.

Nota la velocità angolare Ω_g del glifo si possono ora ricavare, sempre per via grafica, le velocità degli altri punti significativi del glifo ed in particolare del punto B:

$$v_B = \Omega_g \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{O}_2)$$

velocità che è perpendicolare alla direzione O_2B ed il cui modulo vale:

$$v_B = \Omega_g \cdot BO_2$$

Nota la velocità del punto B si può ora ricavare, sempre per via grafica, la velocità del punto C, mediante la seguente relazione, scaturita dall'applicazione del teorema di Rivals:

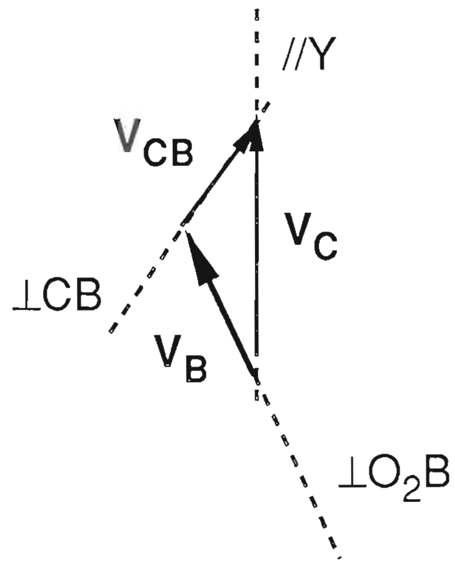
$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}$$

	$\mathbf{v}_C =$	$\mathbf{v}_B +$	$\mathbf{v}_{CB}$
mod.	v_C	$\Omega_g \cdot O_gB$	$\Omega_{CB} \cdot CB$
dir.	// Y	$\perp O_gB$	$\perp CB$
	nota dir.	noto compl.	nota dir.

La conoscenza del modulo del vettore $\mathbf{v}_{CB}$ ci consente di determinare la velocità angolare dell'asta BC nel suo moto rotatorio relativo intorno a B, moto rotatorio coincidente con quello assoluto per la scelta della terna mobile traslante:

$$\Omega_{BC} = \frac{v_{CB}}{CB}$$

che risulta essere oraria.



Si passa alla determinazione delle accelerazioni che compaiono nell'equazione del bilancio energetico.

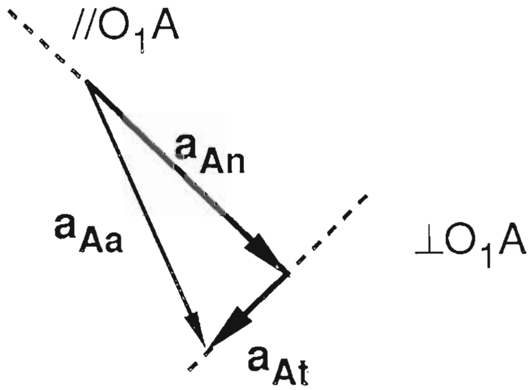
La manovella O_1A, oltre alla velocità angolare Ω, è soggetta anche ad una accelerazione angolare $\dot{\Omega}$ antioraria; pertanto ciascun punto della manovella possiede sia la componente normale, o centripeta, che quella tangenziale dell'accelerazione.

Per quanto riguarda il punto A la sua accelerazione normale è un vettore diretto lungo il raggio cinematico O_1A, con verso diretto da A ad O_1 e modulo dato da:

$$a_{An} = \Omega^2 \cdot O_1A = \frac{v_A^2}{O_1A}$$

quella tangenziale, invece, è ortogonale alla precedente, e perciò ad O_1A, con modulo uguale a: $a_{At} = \dot{\Omega} \cdot O_1A$. L'accelerazione assoluta è, ovviamente, la somma vettoriale delle due componenti il cui modulo vale:

$$a_{Aa} = \sqrt{(\Omega^2 \cdot O_1A)^2 + (\dot{\Omega} \cdot O_1A)^2}$$



Per quanto riguarda il punto A per il principio dei moti relativi si può scrivere la seguente equazione vettoriale:

$$\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t = \mathbf{a}_{tn} + \mathbf{a}_{tt} + \mathbf{a}_{rn} + \mathbf{a}_{rt} + \mathbf{a}_c$$

che nel nostro caso, diventa:[3]

---

[3] Si ricorda che la componente $\mathbf{a}_{ARn}$ è, ovviamente, nulla in quanto il moto relativo è solo di traslazione.

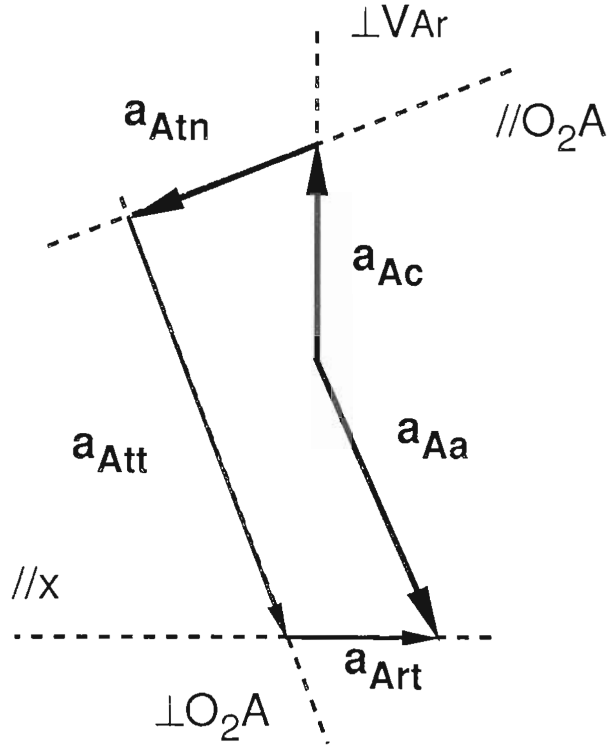
$$a_{An} + a_{At} = a_{Atn} + a_{Att} + a_{Art} + a_{Ac}$$

di cui costruiamo la relativa tabella:

	a_{An} +	a_{At} =	a_{Atn} +	a_{Att} +	a_{Art} +	a_{Ac}
mod.	$\Omega^2 \cdot O_1A$	$\dot{\Omega} \cdot O_1A$	$\Omega_g^2 \cdot O_2A$	$\dot{\Omega}_g \cdot O_2A$	a_{Art}	$2 \cdot \Omega_g \cdot v_{Ar}$
dir.	// O_1A	$\perp O_1A$	// O_2A	$\perp O_2A$	// x	$\perp v_{Ar}$
	noto compl.	noto compl.	noto compl.	nota dir.	nota dir.	noto compl.

Dalla costruzione poligonale, di seguito riportata, ricaviamo i moduli delle accelerazioni incognite a_{Art} e a_{Att} e quest'ultima ci consente di determinare l'accelerazione angolare della terna mobile intorno al punto O_2, accelerazione che coincide con quella del glifo che, pertanto, risulta con verso orario e data da:

$$\dot{\Omega}_g = \frac{a_{Att}}{O_2A}$$



Si posseggono ora tutti i dati per determinare graficamente le accelerazioni di tutti i punti del glifo ed, in particolare, il vettore accelerazione del punto B, dato dalla seguente relazione vettoriale:

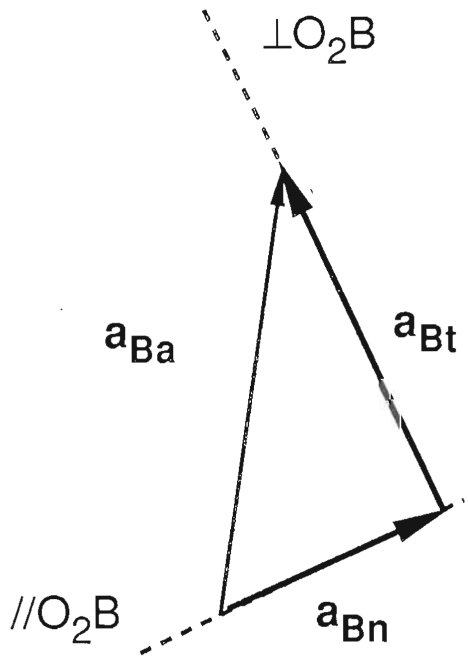
$$\mathbf{a_{Ba}} = \mathbf{a_{Bn}} + \mathbf{a_{Bt}}$$

il cui modulo vale:

$$a_{Ba} = \sqrt{a_{Bn}^2 + a_{Bt}^2}$$

di cui costruiamo la relativa tabella e la costruzione vettoriale:

	a_{Ba} =	a_{Bn} +	a_{Bt}
mod.	a_{Ba}	$\Omega_g^2 \cdot O_2B$	$\dot{\Omega}_g \cdot O_2B$
dir.	?	// O_2B	$\perp O_2B$
	incognito	noto compl.	noto compl.



Infine, si può determinare graficamente il vettore accelerazione del punto C del pattino, dato, sempre per il teorema di Rivals, dalla seguente relazione, ottenuta ricordando che la terna mobile, x'-y', posta con origine in B è dotata di puro moto traslatorio:

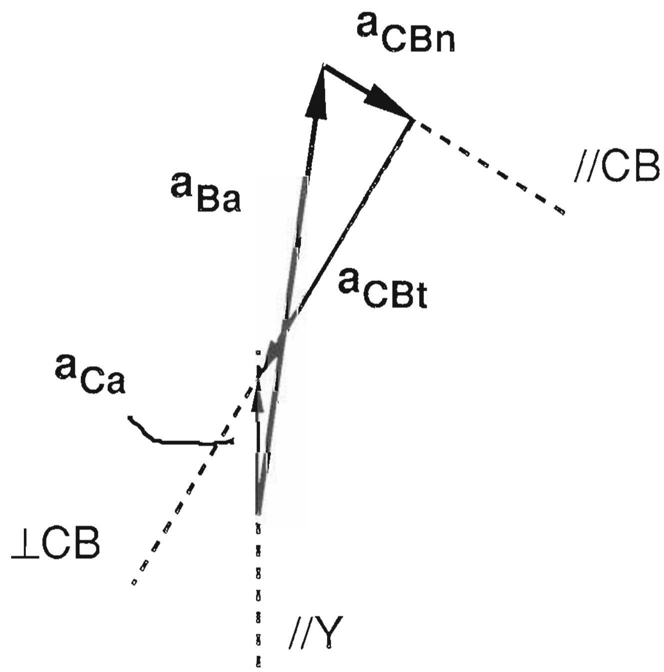
$$\mathbf{a}_{Ca} = \mathbf{a}_{Bn} + \mathbf{a}_{Bt} + \mathbf{a}_{CBn} + \mathbf{a}_{CBt}$$

Della precedente relazione vettoriale viene riportata la tabella esplicativa e la relativa costruzione grafica della poligonale:

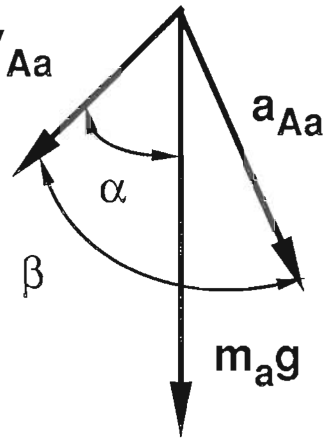
	$\mathbf{a}_{Ca}$ =	$\mathbf{a}_{Bn}$ +	$\mathbf{a}_{Bt}$ +	$\mathbf{a}_{CBn}$ +	$\mathbf{a}_{CBt}$
mod.	a_C	$\Omega_g^2 \cdot O_2B$	$\dot{\Omega}_g \cdot O_2B$	$\Omega_{CB}^2 \cdot CB$	$\dot{\Omega}_{CB} \cdot CB$
dir.	// Y	// O_2B	$\perp O_2B$	// CB	$\perp$ CB
	nota dir.	noto compl.	noto compl.	noto compl.	nota dir.

Dal vettore $\mathbf{a}_{CBt}$ è possibile ricavare l'accelerazione angolare della biella CB che vale:

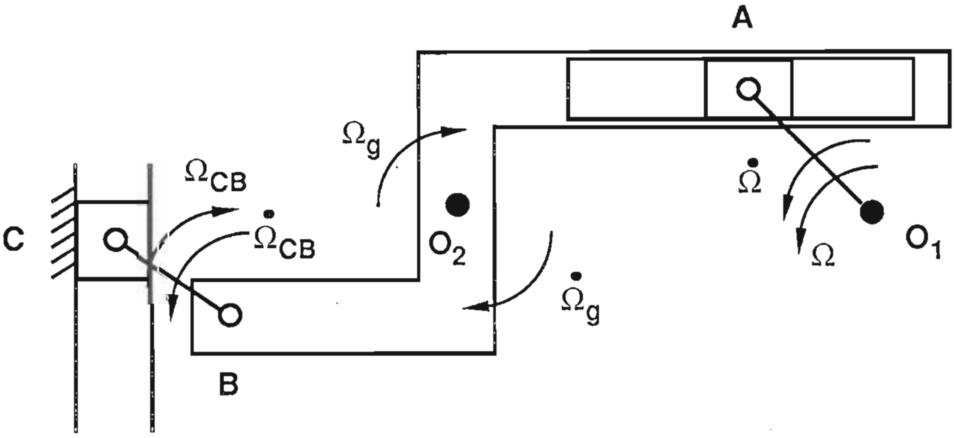
$$\dot{\Omega}_{CB} = \frac{a_{CBt}}{CB}$$



Ricavate tutte le incognite cinematiche presenti nell'equazione del bilancio energetico, si possono esplicitare i vari prodotti scalari ivi presenti con le notazioni angolari riportate nel successivo disegno.



Si riportano nella seguente figura, per maggior chiarezza, i vettori velocità ed accelerazione angolare di tutti i membri costituenti il sistema.



L'equazione del bilancio diviene pertanto:

$$C_m \cdot \Omega - F_r \cdot v_C + m_a\, g \cdot v_{Aa} \cdot \cos\alpha - m_c\, g \cdot v_C - T \cdot v_C +$$

$$- J_1 \cdot \dot{\Omega} \cdot \Omega - m_a \cdot a_{Aa} \cdot v_{Aa} \cdot \cos\beta - J_g \cdot \dot{\Omega}_g \cdot \Omega_g +$$
$$- m_c \cdot a_C \cdot v_C = 0$$

da cui si ricava la cercata coppia motrice:

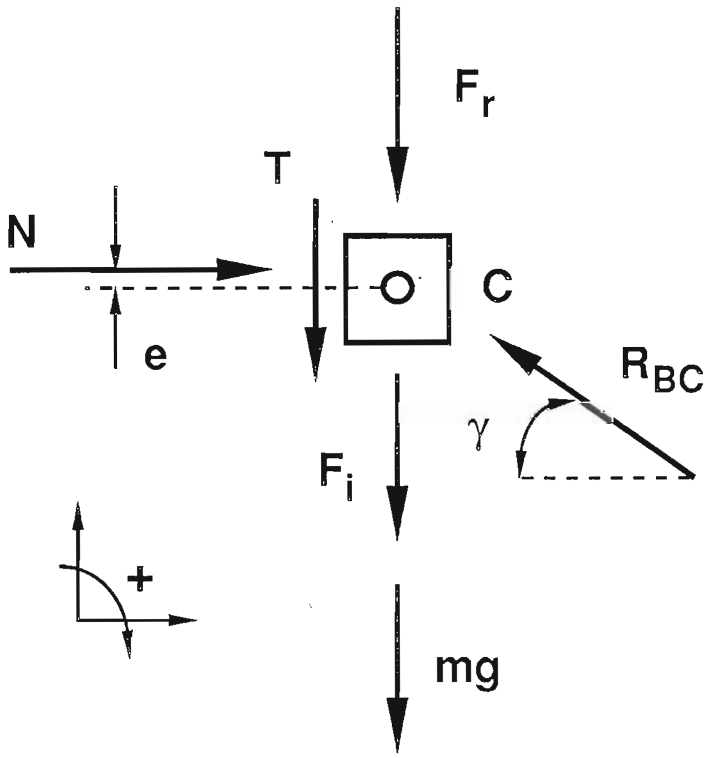
$$C_m = \frac{1}{\Omega} (F_r \cdot v_C - m_a g \cdot v_{Aa} \cdot \cos\alpha + m_c g \cdot v_C + T \cdot v_C +$$

$$+ J_1 \cdot \Omega \cdot \Omega + m_a \cdot a_{Aa} \cdot v_{Aa} \cdot \cos\beta + J_g \cdot \Omega_g \cdot \Omega_g + m_c \cdot a_C \cdot v_C)$$

Avendo a disposizione una sola equazione nelle due incognite C_m e T, per risolvere il problema si deve necessariamente accoppiare alla precedente un'altra equazione che può essere ricavata isolando il pattino e scrivendo le sue equazioni di equilibrio dinamico, una alla traslazione lungo l'asse X, una alla traslazione lungo Y ed una alla rotazione intorno a C. Avendo fissato, per i vettori, come verso positivo quello riportato in figura, avendo indicato con L la larghezza del pattino C e ricordando la relazione che lega le due componenti della reazione d'attrito che sorge nel contatto di strisciamento tra il pattino C e la guida fissa, $T = f_r N$, si può, pertanto, scrivere il seguente sistema di tre equazioni:[4]

[4] L'asta BC è definita 'pendolo': infatti essa è un corpo rigido vincolato solamente tramite due coppie rotoidali ed è considerato privo di massa propria e non soggetto ad alcun sistema di forze esterne. Su di esso, pertanto, agiscono solo le reazioni vincolari delle due cerniere, e se quest'ultime sono considerate perfette e prive d'attrito, le reazioni devono passare per l'asse delle cerniere stesse. Un sistema di forze così fatto, due sole, per essere in equilibrio deve necessariamente risultare una 'coppia di braccio nullo'. In definitiva le due reazioni vincolari sull'asta BC devono avere la stessa retta d'applicazione, coincidente con la congiungente i centri delle due cerniere (B e C), e verso opposto. L'asta risulterà un 'tirante' se le reazioni hanno verso tendente ad allontanare i punti di applicazione delle forze, 'puntone' se tende ad avvicinarli. Ritornando all'equilibrio del pattino C, la reazione vincolare nella coppia rotoidale C, se l'asta non fosse stata un pendolo, doveva essere sostituita da due vettori ortogonali ed indipendenti tra di loro, e perciò da due incognite; essendo, invece, BC un 'pendolo' la direzione della reazione vincolare nella coppia rotoidale C è completamente nota coincidendo con la direzione della congiungente gli assi delle cerniere B e C.

$$\begin{cases} \dfrac{T}{f_r} - R_{BC} \cdot \cos\gamma = 0 \\ - T - F_r - m_c \cdot a_C - m_c \cdot g + R_{BC} \cdot \operatorname{sen}\gamma = 0 \\ \dfrac{T}{f_r} \cdot e - T \cdot \dfrac{L}{2} = 0 \end{cases}$$



Da questo sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite T, R_{BC} ed e, è possibile ricavare innanzitutto l'eccentricità e della reazione normale N:

$$e = \frac{f_r \cdot L}{2}$$

e successivamente la reazione tangenziale d'attrito T, che vale:

$$T = \frac{m_c \cdot (a_C + g) + F_r}{\frac{tg\,\gamma}{f_r} - 1}$$

Sostituito questo valore nella precedente espressione ottenuta dal bilancio energetico globale del sistema si ottiene l'incognita richiesta C_m.