Algebra di Commutazione

Maurizio Palesi

Algebra Booleana - Introduzione

- Per descrivere i dispositivi digitali è necessario avere
  - Un modello che permette di rappresentare insiemi di numeri binari
  - Le funzioni che li mettono in relazione

Algebra Booleana

- E' una quintupla *<B, op1, op2, a, b>*
  - *B*: Insieme in cui vengono eseguite le operazioni
  - *op1*, *op2*: Operazioni a due elementi che agiscono sugli elementi di *B*
  - *a*, *b*: Elementi neutri di *B* per le operazioni *op1* e *op2*
- Tra le possibili algebre Booleane quella a 2 valori è detta *Algebra di Commutazione*

Algebra di Commutazione

- *B*: **{0, 1}**
- *op1*: **AND**
  - Vale 1 solo se applicata a due valori uguali a 1 altrimenti vale 0
- *op2*: **OR**
  - Vale 0 solo se applicata a due valori uguali a 0 altrimenti vale 1
- *a*, *b*: **1, 0**
- Dalla presenza di due soli valori in *B* è direttamente derivabile la seguente operazione a un valore
  - **NOT**: vale 1 se applicata al valore 0 e 0 se è applicata al valore 1

Descrizione delle Funzioni

- Una generica funzione dell'algebra di commutazione può essere descritta in 3 modi
  - $f(B^n) \rightarrow B^m$
  - $f_i(B^n) \rightarrow B$, $i = 1,2,\dots,m$
  - Tabella della verità
- Esempi
  - **AND**: $B \times B \rightarrow B$
  - **OR**: $B \times B \rightarrow B$
  - **NOT**: $B \rightarrow B$

Tabelle della Verità

AND		
x	y	z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR		
x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT	
x	z
0	1
1	0

Simbologia

- Utilizzando le tre operazioni elementari si possono scrivere delle espressioni tra variabili di commutazione che descrivono in forma compatta il comportamento delle funzioni
- Simbologia
  - $z = \mathrm{AND}(x, y) \rightarrow z = x \bullet y \rightarrow z = xy$
  - $z = \mathrm{OR}(x, y) \rightarrow z = x + y$
  - $z = \mathrm{NOT}(x) \rightarrow z = \underline{x}$

Identità e Teoremi (1 di 2)

- Identità
  - $1 \bullet x = x$
  - $0 + x = x$
- Elemento nullo
  - $0 \bullet x = 0$
  - $1 + x = 1$
- Idempotenza
  - $x \bullet x = x$
  - $x + x = x$
- Inverso
  - $x \bullet \underline{x} = 0$
  - $x + \underline{x} = 1$
- Commutativa
  - $x \bullet y = y \bullet x$
  - $x + y = y + x$
- Associativa
  - $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$
  - $(x+y)+z = x+(y+z)$

Identità e Teoremi (2 di 2)

- Assorbimento
  - $x \bullet (x + y) = x$
  - $x + x \bullet y = x$
- Distributiva
  - $x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$
  - $x + y \bullet z = (x + y) \bullet (x + z)$
- De Morgan
  - $\underline{x \bullet y} = \underline{x} + \underline{y}$
  - $\underline{x + y} = \underline{x} \bullet \underline{y}$

Teorema di Shannon

- Data una funzione Booleana $f(B^n)=B$ è sempre vero che:
  - $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1 f(1,x_2,\ldots,x_n) + \underline{x}_1 f(0,x_2,\ldots,x_n)$
  - $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (x_1+f(0,x_2,\ldots,x_n)) \bullet (\underline{x}_1+f(1,x_2,\ldots,x_n))$
- Dimostrazione
  - Per induzione matematica completa

Principio di Dualità

- *Un'equazione booleana rimane valida se si considera il duale di entrambi i lati dell'uguaglianza*
- Il *duale* di un'espressione si ottiene
  - ➔ Cambiando gli AND con gli OR e viceversa
  - ➔ Cambiando gli 1 con 0 e viceversa

1. $x + xy = x(1 + y) = x$

2. $xy + x\underline{y} = x(y + \underline{y}) = x$

3. $x + \underline{x}y = (x + \underline{x})(x + y) = x + y$

duale ⟺

1d. $x(x + y) = x + (0 \bullet y) = x$

2d. $(x + y)(x + \underline{y}) = x + (y\underline{y}) = x$

6d. $x(\underline{x} + y) = x\underline{x} + xy = xy$

Teorema del Consenso

$$\boxed{xy + \underline{x}z + yz = xy + \underline{x}z}$$

Dimostrazione

$$
\begin{aligned}
xy + \underline{x}z + yz &= xy + \underline{x}z + yz(x + \underline{x}) = xy + \underline{x}z + xyz + \underline{x}yz = \\
&= xy + xyz + \underline{x}z + \underline{x}yz = xy(1 + z) + \underline{x}z(1 + y) = \\
&= xy + \underline{x}z
\end{aligned}
$$

□

Utilizzando il *pricipio di dualità* si ha

$$\boxed{(x + y)(\underline{x} + z)(y + z) = (x + y)(\underline{x} + z)}$$

Esercizio

- Semplificare l'espressione booleana $(a + b)(\underline{a} + c)$

$$(a + b)(\underline{a} + c) = a\underline{a} + ac + \underline{a}b + bc =$$

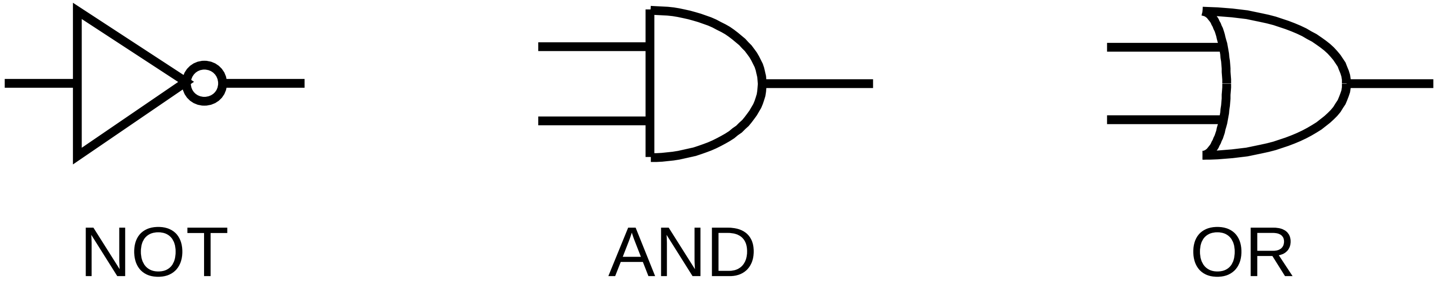
T. del consenso

$$= \boxed{ac + \underline{a}b} + \boxed{bc} =$$

$$= ac + \underline{a}b$$

Dalla Funzione al Circuito

- Per costruire un circuito digitale che si comporta come l'espressione è necessario trovare degli equivalenti elettrici per le variabili e per gli operatori
  - Variabile → Conduttore
  - Operatori → Porte logiche



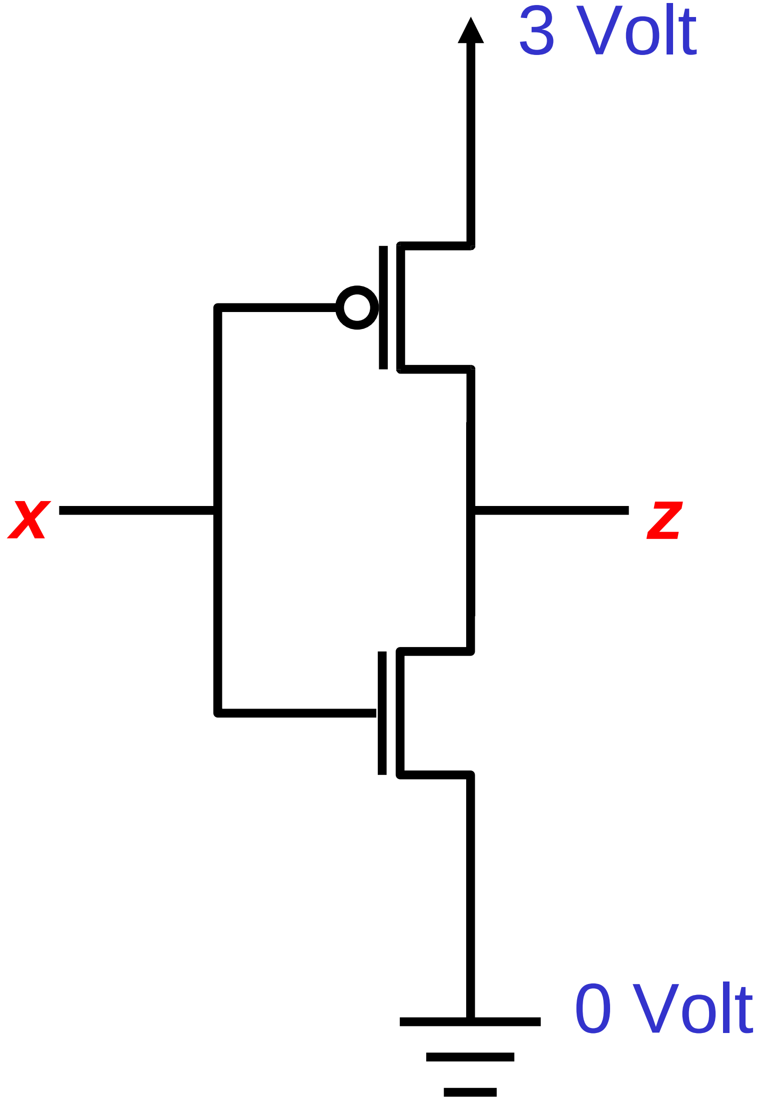
Transistori di tipo N e P

Tipo N **Tipo P**

Gate =1, conduzione

Gate =0, conduzione

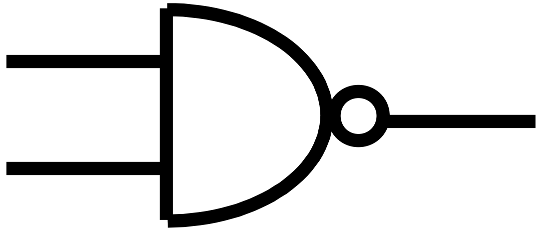
Porta logica NOT



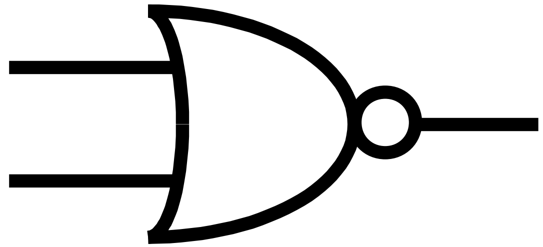
NOT	
x	z
0	1
1	0

Altre Porte Logiche

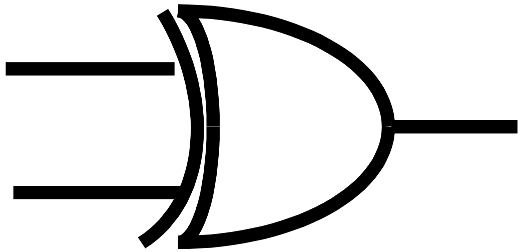
NAND		
x	y	z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



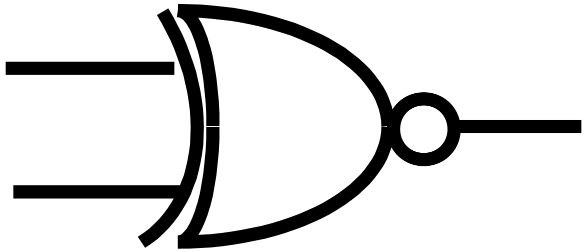
NOR		
x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



XOR		
x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



XNOR		
x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Operatori Universali (1 di 2)

- Gli operatori universali (o funzionalmente completi) consentono di rappresentare una qualsiasi funzione di commutazione

- **AND**, **NOT** sono operatori universali
  - ➔X or Y = (X or Y)’’ = (X’ and Y’)’

- **OR** e **NOT** sono operatori universali
  - ➔X and Y= (X and Y)’’ = (X’ or Y’)’

Operatori Universali (2 di 2)

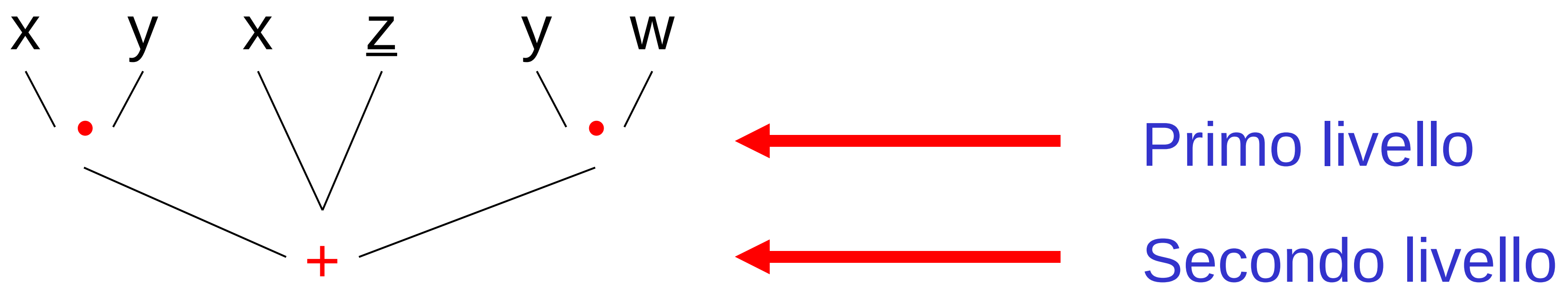
- **NAND** è un operatore universale
  - ➔ X' = X nand X
  - ➔ X and Y = (X nand Y)'
  - ➔ X or Y = (X or Y)'' = (X' and Y')' = X' nand Y'

- **NOR** è un operatore universale
  - ➔ X' = X nor X
  - ➔ X or Y = (X nor Y)'
  - ➔ X and Y = (X and Y)'' = (X' or Y')' = X' nor Y'

Espressioni Booleane

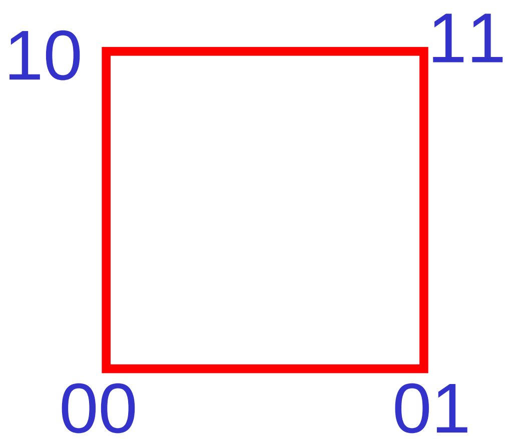
- Si definisce espressione booleana una combinazione di variabili booleane e costanti (0,1) attuata mediante gli operatori AND, OR e NOT
- Si definisce *numero di livelli* di una espressione il massimo tra i numeri di operazioni che agiscono in cascata sui *letterali*

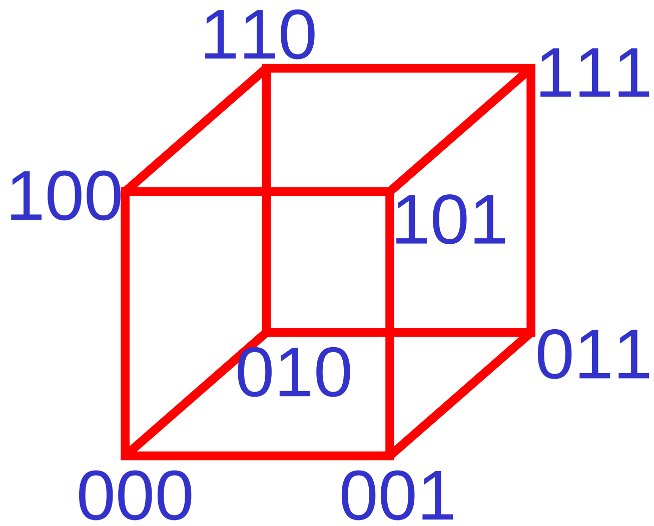
$$x \bullet y + x + \underline{z} + y \bullet w$$



Forme Canoniche

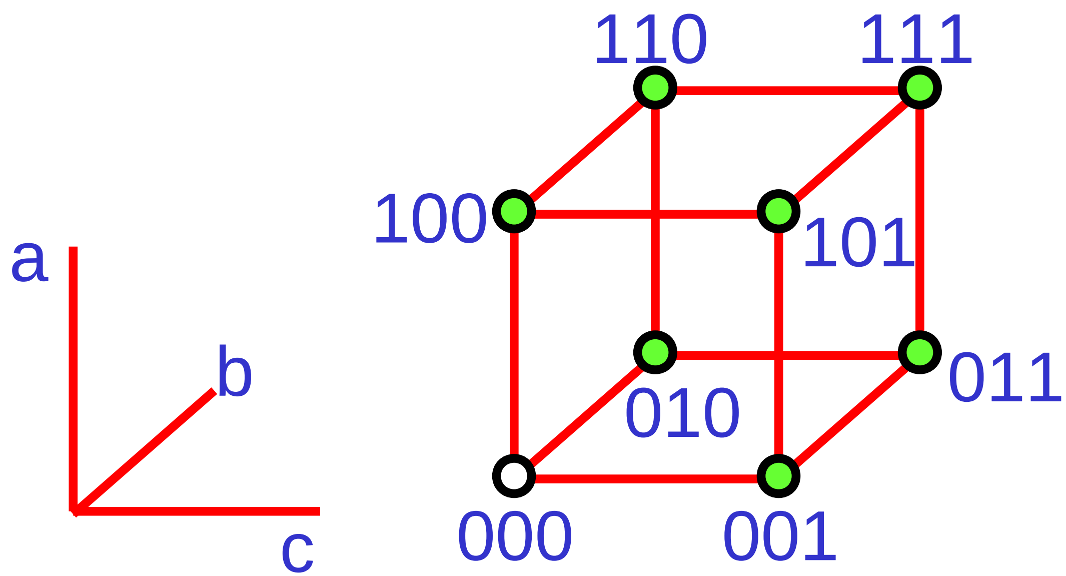
- Sia $f(B^n)=B$ una funzione Booleana ad una sola uscita completamente specificata
- Le 2^n configurazioni degli ingressi possono essere mappate sui vertici di un *n*-cubo in modo tale che due punti adiacenti siano a distanza di Hamming pari a 1





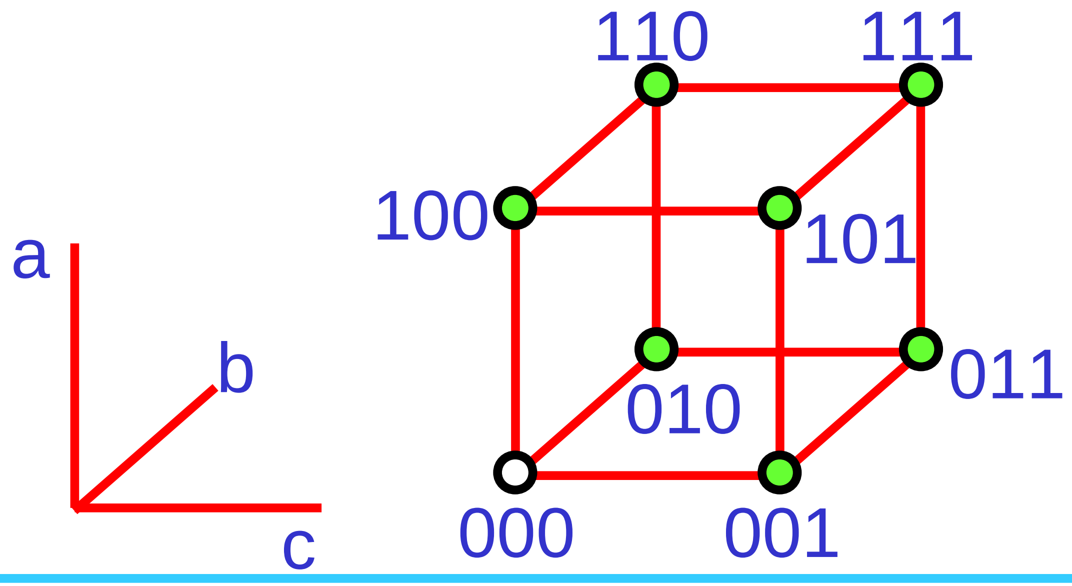
Forme Canoniche

- Si consideri per esempio *n*=3 (variabili *a*, *b*, *c*)
- Gli spigoli del cubo saranno indicati con un pallino pieno se in corrispondenza di quel valore di ingresso la funzione vale 1 e con un pallino vuoto altrimenti



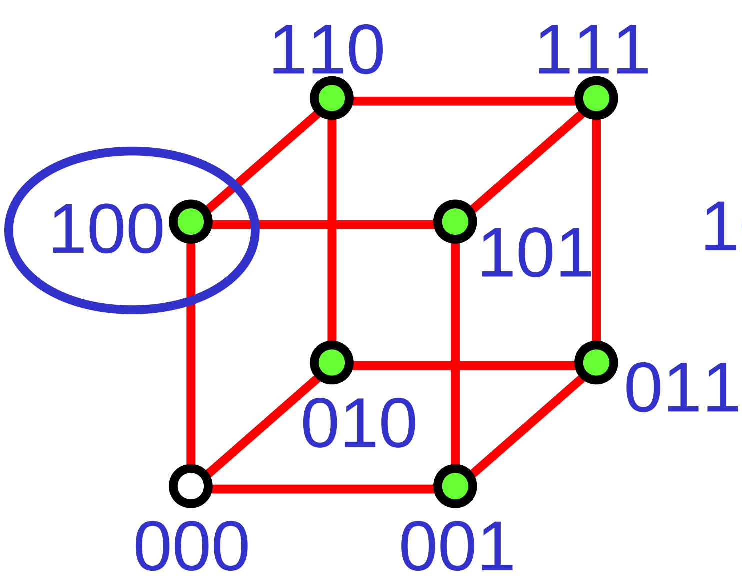
Forme Canoniche (Definizioni)

- **Letterale**: E' una coppia variabile valore
  - ➔ (a,0), (a,1), (b,0), (b,1), (c,0), (c,1)
  - ➔ Per brevità i suddetti saranno indicati rispettivamente come: $\underline{a}$,a,$\underline{b}$,b,$\underline{c}$,c
- **Implicante**: Prodotto di letterali tale che se tale prodotto vale 1 anche *f* vale 1
  - ➔ Esempio: a, b, c, ab, abc, a$\underline{b}$c, … sono implicanti per questa funzione

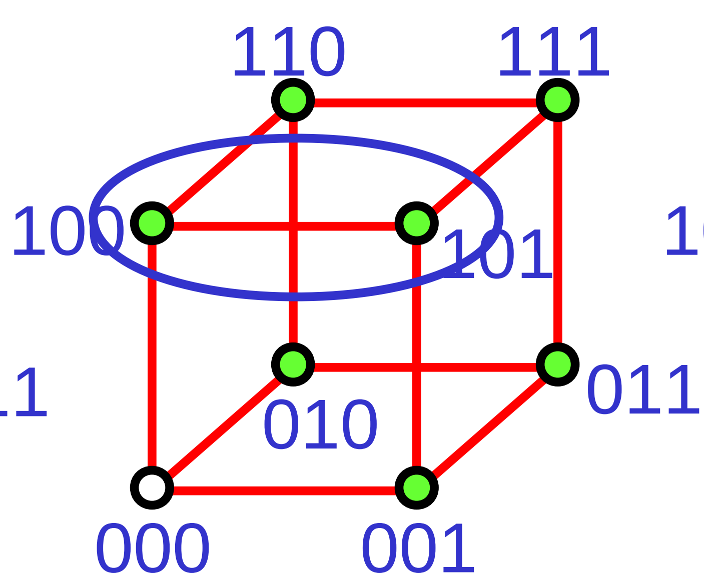


Forme Canoniche (Definizioni)

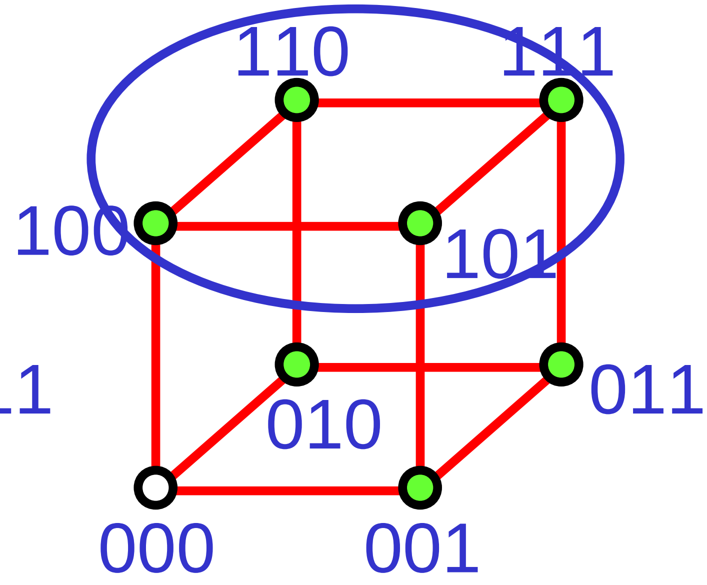
- **Implicante**: Può essere visto come un sottocubo di soli 1 della funzione data. Cioè come un insieme di 2^k configurazioni di ingresso a *distanza di Hamming* unitaria



Implicante $a\underline{bc}$
(dimensione 1)



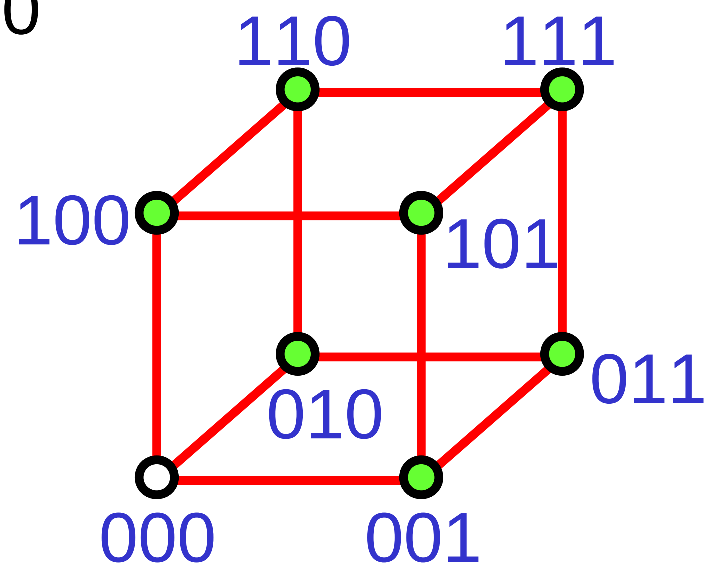
Implicante $a\underline{b}$
(dimensione 2)



Implicante a
(dimensione 4)

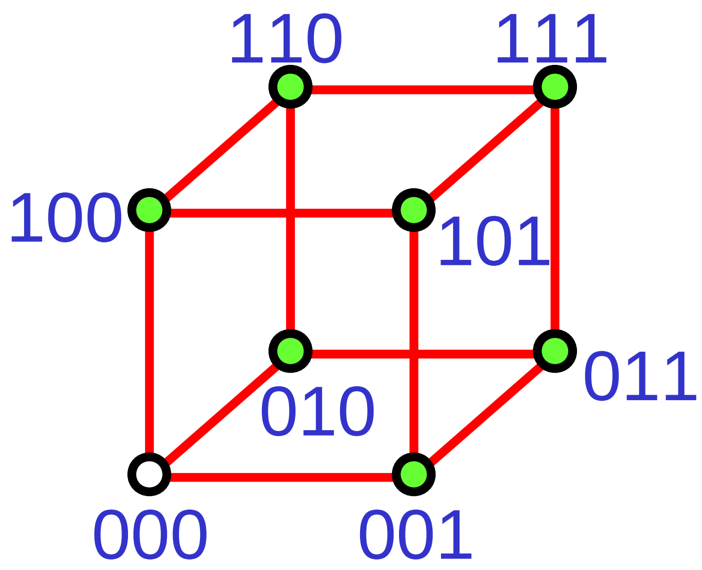
Forme Canoniche (Definizioni)

- **Mintermine**: un implicante in cui compaiono tutte le variabili di ingresso
  - ➔ $a\underline{bc}$, $ab\underline{c}$, abc, $a\underline{b}c$, $\underline{a}b\underline{c}$, $\underline{a}bc$, $\underline{ab}c$
  - ➔ NOTA: I mintermini di una funzione vengono spesso identificati con il numero in base 10 corrispondente al valore binario del mintermine. (Es., $a\underline{bc} = m_4$)
- **Maxtermine**: è un punto dello spazio B^n tale per cui la funzione calcolata in quel punto vale 0
- ***On-set***: Insieme dei mintermini
- ***Off-set***: Insieme dei maxtermini



Forme Canoniche (Definizioni)

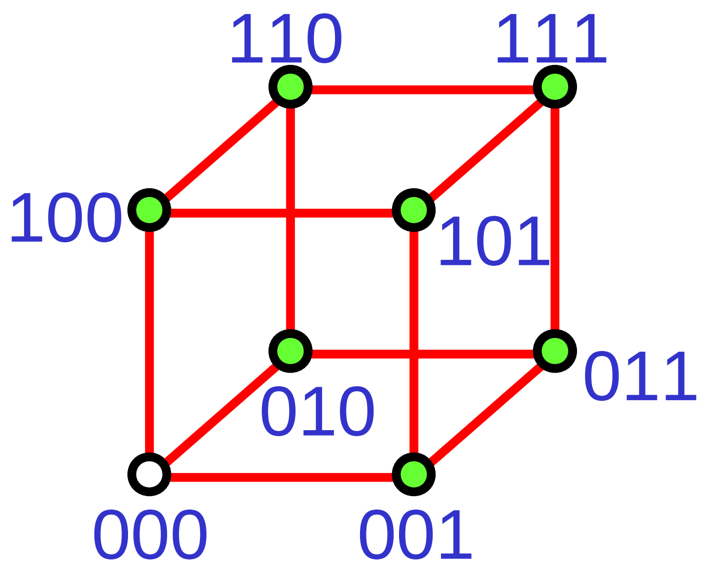
- **Implicante primo**: implicante tale che non esiste nessun altro implicante di dimensioni maggiori che lo contenga interamente



- **Es.**: L'implicante abc non è primo perché è contenuto nell'implicante ab che è a sua volta contenuto nell'implicante a che è primo perché non è contenuto in nessun altro implicante

Forme Canoniche (Definizioni)

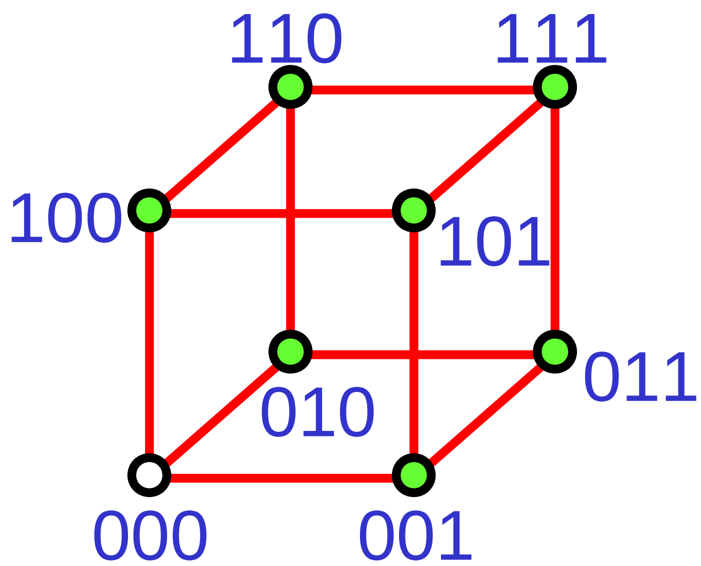
- **Implicante essenziale**: implicante primo che copre almeno un mintermine non coperto da altri implicanti primi



- **Es.**: L'implicante primo c è essenziale perchè copre il mintermine abc che non è coperto da nessun altro implicante primo.

Forme Canoniche (Definizioni)

- **Copertura di una funzione**: è un insieme di implicanti che coprono tutti i mintermini della funzione.



- **Es.**: {a, b, c} è una copertura. {a, b, <u>ab</u>c} è una copertura.

Prima Forma Canonica

- Sia $f(x_1,\ldots,x_n)$ una funzione Booleana
- Sia $\{m_1,m_2,\ldots,m_k\}$ l'*On-set* della funzione
- La prima forma canonica di copertura della funzione (detta somma di prodotti) è:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$$

Seconda Forma Canonica

- Sia $f(x_1,\ldots,x_n)$ una funzione Booleana
- Sia $\{M_1,M_2,\ldots,M_k\}$ l'*Off-set* della funzione
- La seconda forma canonica di copertura della funzione (detta prodotto di somme) è:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = M_1 \bullet M_2 \bullet \ldots \bullet M_k$$

Esempio

o = f(a,b,c)			
a	**b**	**c**	**o**
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$m_0 = \underline{abc}$ quando a=0,b=0,c=0 $\rightarrow m_0=1$

$M_1 = a + b + \underline{c}$ quando a=0,b=0,c=1 $\rightarrow M_1=0$

$M_2 = a + \underline{b} + c$ quando a=0,b=1,c=0 $\rightarrow M_2=0$

$m_3 = \underline{a}bc$ quando a=0,b=1,c=1 $\rightarrow m_3=1$

$m_4 = a\underline{bc}$ quando a=1,b=0,c=0 $\rightarrow m_4=1$

$M_5 = \underline{a} + b + \underline{c}$ quando a=1,b=0,c=1 $\rightarrow M_5=0$

$M_6 = \underline{a} + \underline{b} + c$ quando a=1,b=1,c=0 $\rightarrow M_6=0$

$m_7 = abc$ quando a=1,b=1,c=1 $\rightarrow m_7=1$

On-set = $\{m_0, m_3, m_4, m_7\}$

Off-set = $\{M_1, M_2, M_5, M_6\}$

PFC: $m_0 + m_3 + m_4 + m_7$

SFC: $M_1\ M_2\ M_5\ M_6$

PFC: $\underline{abc} + \underline{a}bc + a\underline{bc} + abc$

SFC: $(a+b+\underline{c})\ (a+\underline{b}+c)\ (\underline{a}+b+\underline{c})\ (\underline{a}+\underline{b}+c)$

Forme Negate

- Un mintermine ed un maxtermine identificati dallo stesso pedice sono l'uno il complemento dell'altro: $M_j = \overline{m_j}$
  - **Es:** $\overline{m_3}$= NOT(xyz) = $\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = M_3$
- E' possibile ricavare semplicemente le forme negate delle funzioni espresse in prima e seconda forma canonica
  - **Es:** $f=\sum_i m_i \rightarrow \overline{f}$ = NOT($\sum_i m_i$) → *De Morgan* → $\overline{f} = \prod_i \overline{m_i} \rightarrow \overline{f} = \prod_i M_i$
  - **Es:** $f=\prod_i M_i \rightarrow \overline{f}$ = NOT($\prod_i M_i$) → *De Morgan* → $\overline{f} = \sum_i \overline{M_i} \rightarrow \overline{f} = \sum_i m_i$
- Esempio

PFC: $f = m_0 + m_3 + m_4 + m_7$

$\overline{f} = M_0\, M_3\, M_4\, M_7$

$\overline{f} = (a+b+c)(a+\overline{b}+\overline{c})(\overline{a}+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$

SFC: $f = M_1\, M_2\, M_5\, M_6$

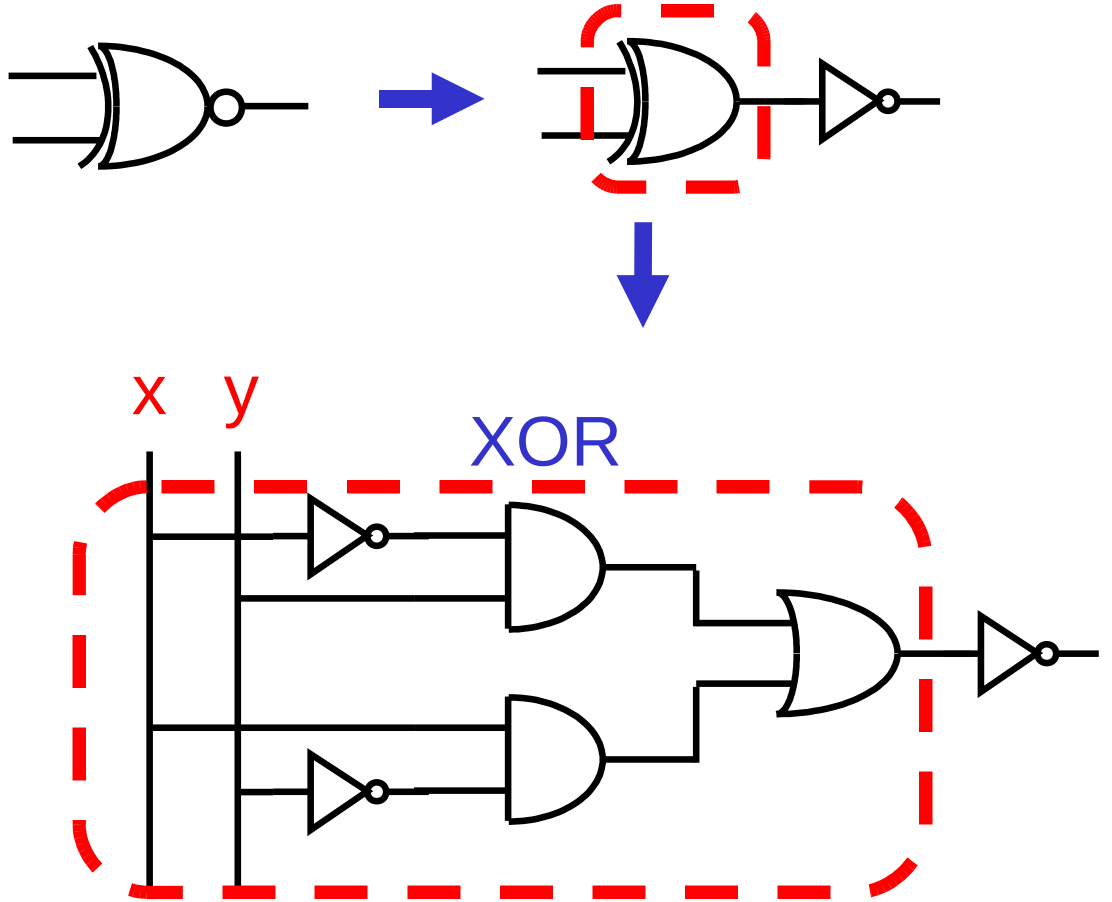
$\overline{f} = m_1 + m_2 + m_5 + m_6$

$\overline{f} = \overline{a}\,\overline{b}c + \overline{a}b\overline{c} + a\overline{b}c + ab\overline{c}$

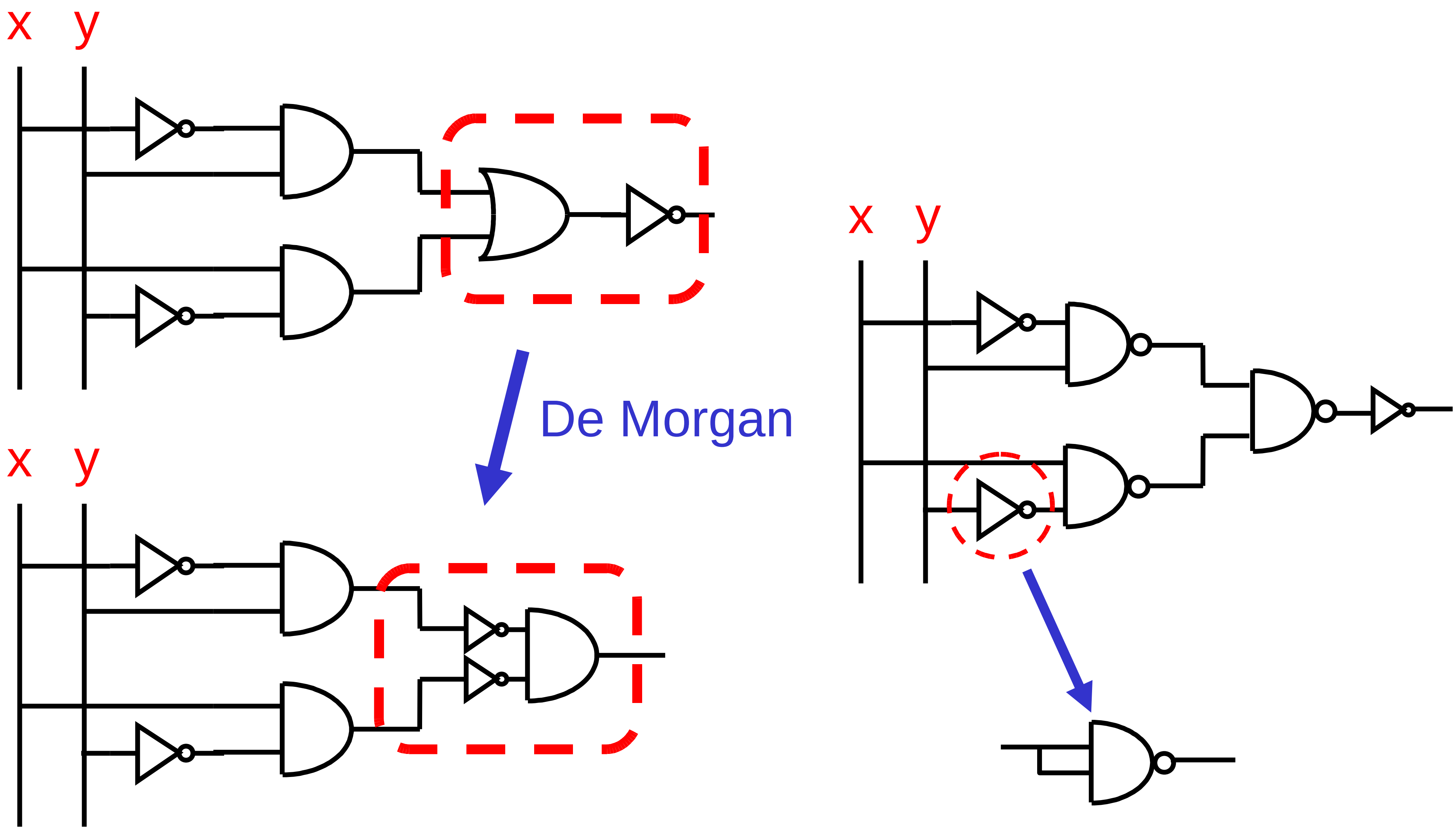
Esercizio 1 (1 di 2)

- Si descriva in termini di porte logiche NAND, a uno e due ingressi, la funzionalità della porta logica XNOR.

XNOR		
x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Esercizio 1 (2 di 2)



Esercizio 2

- Si scriva la tabella della verità della funzione Booleana *o=f(a,b,c)*, tale che *o* vale 1 solo se la somma (senza riporto) dei bit sulle linee *a* e *b* è uguale al valore della linea *c* e si ricavi l'*On-set.*

o = f(a,b,c)			
a	**b**	**c**	**o**
0	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**0**

On-set

$m_0 = \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$

$m_3 = \underline{a}bc$

$m_5 = a\underline{b}c$

$m_6 = ab\underline{c}$

Esercizio 3

- Si consideri un circuito combinatorio che ha due ingressi a 2 bit: $A(a_1,a_0)$ e $B(b_1,b_0)$, un ingresso *op* a 1 bit e un'uscita *out* a 1 bit. Se *op*=0, *out* vale 1 se $A>B$. Se *op*=1, *out* vale 1 se $A=B$. Definire l'*On-set* della funzione $out(op,a_1,a_0,b_1,b_0)$.

- <u>Soluzione</u>
  - Non è agevole procedere come prima costruendo la tabella della verità che in questo caso conterrebbe un numero di righe pari a $2^5=32$.
  - Generiamo quindi direttamente i mintermini
    - **out vale 1 se** *op*=0 (cioè $\underline{op}$) **E** se $A>B$ [cioè se $a_1=b_1$ (a_1b_1 **O** $\underline{a_1}\underline{b_1}$) **E** $a_0=1$ (a_0) **E** $b_0=0$ ($\underline{b_0}$) **OPPURE se** $a_1=1$ (a_1) **E** $b_1=0$ ($\underline{b_1}$)]
    - Quindi la precedente diventa (gli **E** diventano AND ($\bullet$) e gli **O** diventano OR (**+**)): $\underline{op}((a_1b_1+\underline{a_1}\underline{b_1})\bullet a_0\bullet\underline{b_0}+a_1\bullet\underline{b_1})$
    - Allo stesso modo si ha per la seconda: $op((\underline{a_0}\underline{b_0}+a_0b_0)(\underline{a_1}\underline{b_1}+a_1b_1))$
  - $\underline{op}a_1a_0b_1\underline{b_0}=m_{14}$, $\underline{op}\,\underline{a_1}a_0\underline{b_1}\underline{b_0}=m_4$, *etc.*

Esercizio 4

- Si scriva l'espressione secondo la prima forma canonica della funzione $f(a,b,c)$ che ha *On-set* = $\{m_2,m_4,m_5,m_7\}$.

- Soluzione
  - ➔ $m_2 = m_{010} = \underline{a}b\underline{c}$
  - ➔ $m_4 = m_{100} = a\underline{b}\underline{c}$
  - ➔ $m_5 = m_{101} = a\underline{b}c$
  - ➔ $m_7 = m_{111} = abc$
  - ➔ $f(a,b,c) = \underline{a}b\underline{c} + a\underline{b}\underline{c} + a\underline{b}c + abc$

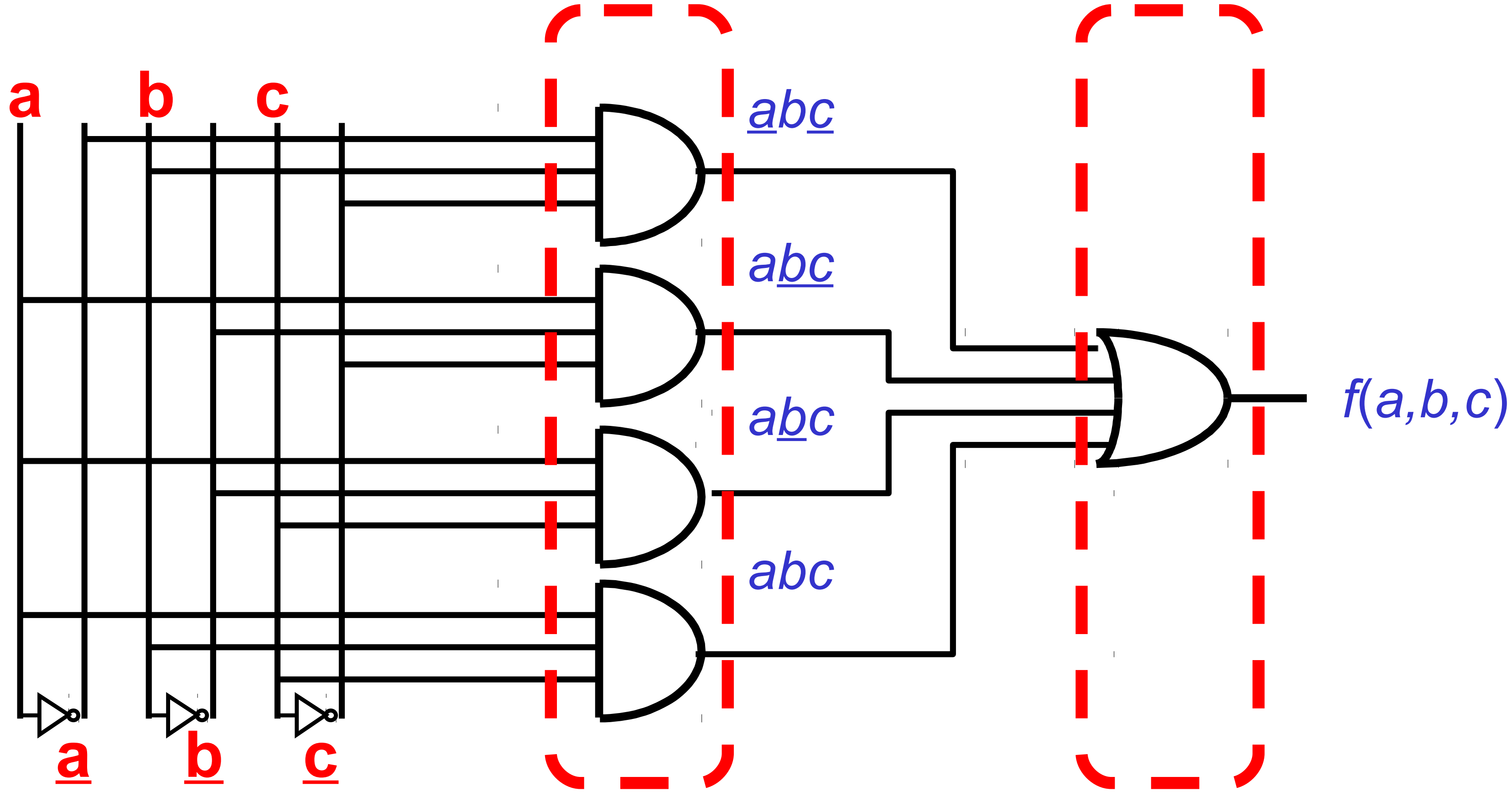
Esercizio 5

- Si scriva l'espressione secondo la seconda forma canonica dela funzione $f(a,b,c)$ che ha *On-set* = $\{m_2,m_4,m_5,m_7\}$.

- Soluzione
  - ➔ $f(a,b,c) = M_0\,M_1\,M_3\,M_6$
  - ➔ $M_0 = M_{000} = a+b+c$
  - ➔ $M_1 = M_{001} = \mathrm{a}+b+\underline{c}$
  - ➔ $M_3 = M_{011} = \mathrm{a}+\underline{b}+\underline{c}$
  - ➔ $M_6 = M_{110} = \underline{a}+\underline{b}+c$
  - ➔ $f(a,b,c) = (a+b+c)\bullet(a+b+\underline{c})\bullet(a+\underline{b}+\underline{c})\bullet(\underline{a}+\underline{b}+c)$

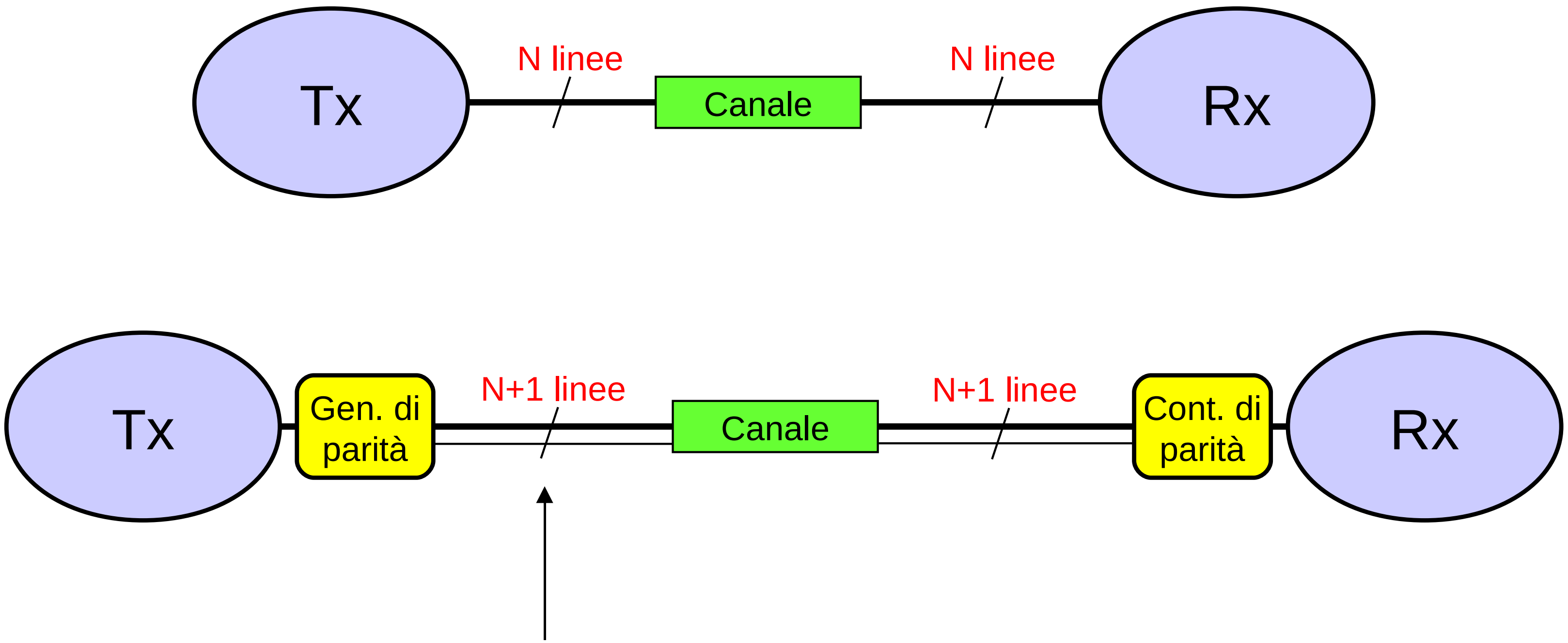
Esercizio 6

- Si disegni il circuito a due livelli corrispondente all'espressione in somma di prodotti della funzione dell'Esercizio 4 [$f(a,b,c) = \underline{abc} + a\underline{bc} + a\underline{b}c + abc$]



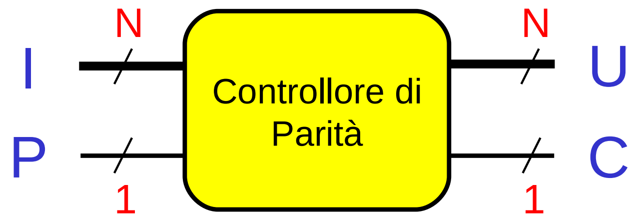
Esercizio 7

- Progettare un generatore ed un controllore di parità



L'informazionè è formata da un numero di 1 pari

Esercizio 7 (cont.)



U = I

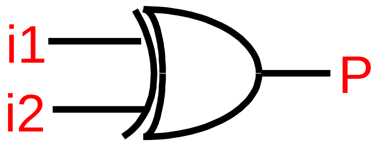
$$P = \begin{cases} 1 & \text{se il numero di 1 in I è dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

U = I

$$C = \begin{cases} 1 & \text{se il numero di 1 in } I \cup P \text{ è dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

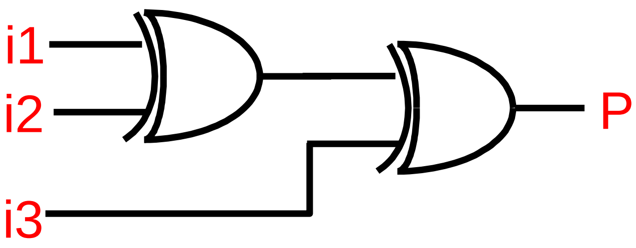
Esercizio 7 (cont.)

XOR		
i1	i2	P
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



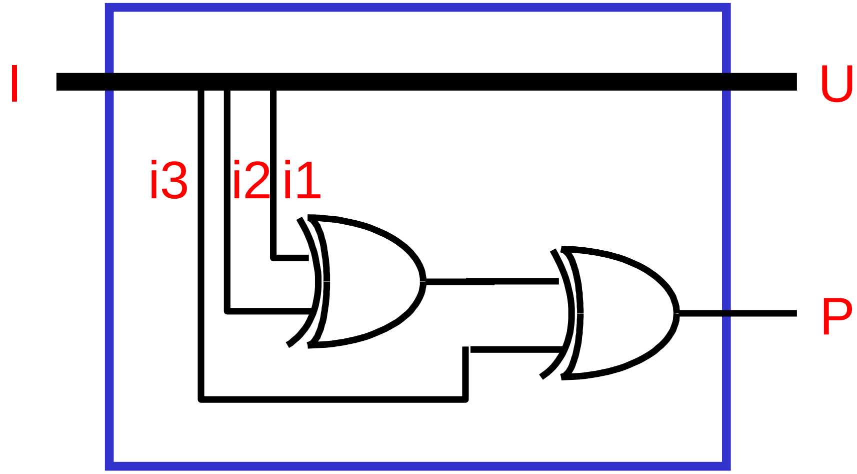
$P = i1 \oplus i2$

XOR			
i1	i2	i3	P
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



$P = i1 \oplus i2 \oplus i3$

Generatore di Parità



Controllore di Parità