Forme Canoniche

1. Scrivere in Prima e Seconda Forma Canonica la funzione completamente specificata $f(a,b,c)$ avente ON-set $F^1 = \{m_1, m_3, m_5, m_6\}$

   Soluzione

   Dati il numero di parametri della funzione ed il suo ON-set, possiamo scrivere la tabella di verità:

a	**b**	**c**	$f(a,b,c)$	
0	0	0	0	$M_0 = a + b + c$
0	0	1	1	$m_1 = \bar{a}\bar{b}c$
0	1	0	0	$M_2 = a + \bar{b} + c$
0	1	1	1	$m_3 = \bar{a}bc$
1	0	0	0	$M_4 = \bar{a} + b + c$
1	0	1	1	$m_5 = a\bar{b}c$
1	1	0	1	$m_6 = ab\bar{c}$
1	1	1	0	$M_7 = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$

Prima Forma Canonica (PFC):

$$f(a,b,c) = m_1 + m_3 + m_5 + m_6 = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c}$$

Seconda Forma Canonica (SFC):

$$f(a,b,c) = M_0 \cdot M_2 \cdot M_4 \cdot M_7 = (a + b + c) \cdot (a + \bar{b} + c) \cdot (\bar{a} + b + c) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$$

2. Scrivere in Prima e Seconda Forma Canonica la funzione completamente specificata $f(a,b,c)$ avente ON-set $F^1 = \{m_1, m_4, m_5, m_7\}$

   Soluzione

   Dati il numero di parametri della funzione ed il suo ON-set, possiamo scrivere la tabella di verità:

a	**b**	**c**	$f(a,b,c)$	
0	0	0	0	$M_0 = a + b + c$
0	0	1	1	$m_1 = \bar{a}\bar{b}c$
0	1	0	0	$M_2 = a + \bar{b} + c$
0	1	1	0	$M_3 = a + \bar{b} + \bar{c}$
1	0	0	1	$m_4 = a\bar{b}\bar{c}$
1	0	1	1	$m_5 = a\bar{b}c$
1	1	0	0	$M_6 = \bar{a} + \bar{b} + c$
1	1	1	1	$m_7 = abc$

Prima Forma Canonica (PFC):

$f(a,b,c) = m_1 + m_4 + m_5 + m_7 = \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + abc$

Seconda Forma Canonica (SFC):

$f(a,b,c) = M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_6 = (a + b + c) \cdot (a + \bar{b} + c) \cdot (a + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + c)$

Mappe di Karnaugh

1. $f(a,b,c) = \sum m(2,3,4,5)$ => $f(a,b,c) = \bar{a}b + a\bar{b}$

a \ bc	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	1	0	0

2. $f(a,b,c) = \sum m(0,2,3,4)$ => $f(a,b,c) = \bar{a}b + \bar{b}\bar{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	0	0

3. $f(a,b,c) = \sum m(3,4,6,7)$ => $f(a,b,c) = a\bar{c} + bc$

a \ bc	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

4. $f(a,b,c) = \sum m(0,2,3,4,6)$ => $f(a,b,c) = \bar{c} + \bar{a}b$

a \ bc	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	0	1

5. $f(a,b,c) = \sum m(0,2,4,5,6)$ => $f(a,b,c) = \bar{c} + a\bar{b}$

a \ bc	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	1	0	1

6. $f(a,b,c) = \sum m(1,3,4,5,6)$ => $f(a,b,c) = a\bar{c} + \bar{a}c + \bar{b}c$

oppure $f(a,b,c) = a\bar{c} + \bar{a}c + a\bar{b}$

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	1

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	1

7. $f(a,b,c) = \bar{a}c + \bar{a}b + a\bar{b}c + bc$ => $f(a,b,c) = c + \bar{a}b$

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0

8. $f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14)$ => $f(a,b,c,d) = \bar{c} + \bar{a}\bar{d} + b\bar{d}$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	0

9. $f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,3,8,9,10,11,12,13,14,15)$ => $f(a,b,c,d) = a + \bar{b}\bar{c} + \bar{b}d$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

10. $f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{b}c\bar{d} + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc\bar{d}$ => $f(a,b,c,d) = \bar{b}\bar{d} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}c\bar{d}$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1

11. $f(a,b,c,d) = \sum m(0,5,10,11,12,13,15)$
=> $f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c} + b\bar{c}d + a\bar{b}c + abd$
oppure $f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c} + b\bar{c}d + a\bar{b}c + acd$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	1	0
10	0	0	1	1

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	1	0
10	0	0	1	1

12. b $f(a,b,c,d) = \sum m(0,2,5,8,10,11,12,13,15)$

=> $f(a,b,c,d) = \bar{b}\bar{d} + ab\bar{c} + b\bar{c}d + a\bar{b}c + abd$

oppure $f(a,b,c,d) = \bar{b}\bar{d} + ab\bar{c} + b\bar{c}d + a\bar{b}c + acd$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	1	1	0
10	1	0	1	1

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	1	1	0
10	1	0	1	1

13. $f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,2,4,5,10,11,13,15)$

una possibile forma minima è $f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{c} + abd + a\bar{b}c + \bar{b}c\bar{d}$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	0
11	0	1	1	0
10	0	0	1	1

14. $f(a,b,c,d) = \prod M(3,7,11,15)$

Procedendo in maniera duale rispetto ai casi visti fino a questo momento (riguardanti la Somma di Prodotti) si ha: $f(a,b,c,d) = (\bar{c} + \bar{d})$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	1

15. $f(a,b,c,d) = \prod M(3,4,6,7,11,12,13,14,15)$
Procedendo come nel caso precedente, in maniera duale rispetto alla Somma di Prodotti, si ha: $f(a,b,c,d) = (\bar{b} + d)(\bar{a} + \bar{b})(\bar{c} + \bar{d})$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1

16. $f(a,b,c,d) = \sum m(1,3,7,11,15) + \sum d(0,2,5)$
=> $f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b} + cd$
oppure $f(a,b,c,d) = \bar{a}d + cd$

ab \ cd	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

ab \ cd	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

17. $f(a,b,c,d) = \sum m(4,12,13,14,15) + \sum d(0,2,5,8)$
=> $f(a,b,c,d) = \bar{c}\bar{d} + ab$
oppure $f(a,b,c,d) = b\bar{c} + ab$

ab \ cd	00	01	11	10
00	X	0	0	X
01	1	X	0	0
11	1	1	1	1
10	X	0	0	0

ab \ cd	00	01	11	10
00	X	0	0	X
01	1	X	0	0
11	1	1	1	1
10	X	0	0	0

18. Minimizzare la funzione rappresentata dalla mappa:

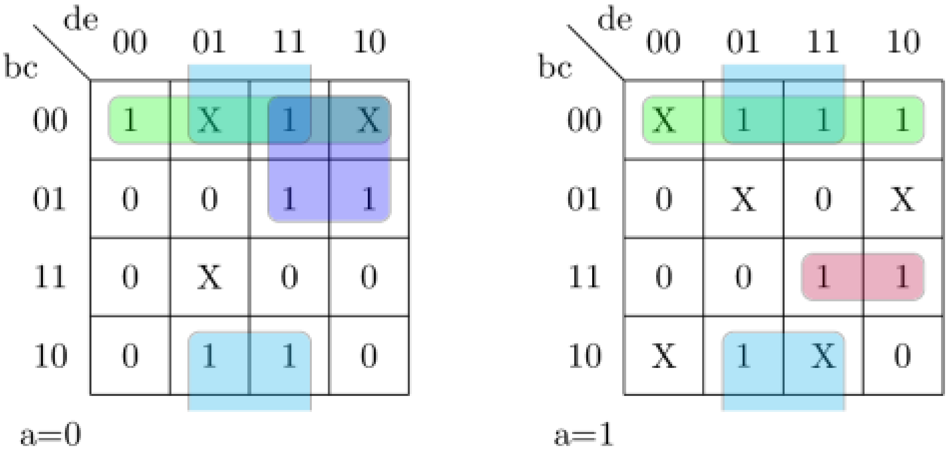
bc \ de	00	01	11	10
00	1	X	1	X
01	0	0	1	1
11	0	X	0	0
10	0	1	1	0

a=0

bc \ de	00	01	11	10
00	X	1	1	1
01	0	X	0	X
11	0	0	1	1
10	X	1	X	0

a=1

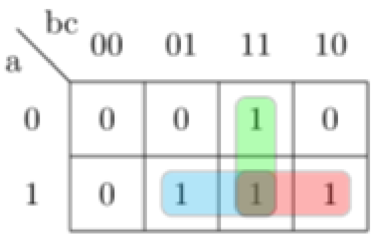
=> $f(a,b,c,d,e) = \bar{b}\bar{c} + \bar{c}e + \bar{a}\bar{b}d + abcd$



19. Si consideri un sistema composto da tre interruttori collegati ad una sola lampadina. Si ricavi la forma minima della funzione logica per cui la lampadina è accesa solo se almeno due interruttori sono chiusi.

Soluzione

a	b	c	$f(a,b,c)$	
0	0	0	0	$M_0 = a + b + c$
0	0	1	0	$M_1 = a + b + \bar{c}$
0	1	0	0	$M_2 = a + \bar{b} + c$
0	1	1	1	$m_3 = \bar{a}bc$
1	0	0	0	$M_4 = \bar{a} + b + c$
1	0	1	1	$m_5 = a\bar{b}c$
1	1	0	1	$m_6 = ab\bar{c}$
1	1	1	1	$m_7 = abc$



$f(a,b,c) = bc + ab + a\bar{c}$

20. Si considerino i numeri composti da 5 bit (a, b, c, d, e) con a il bit più significativo.
Si determini:

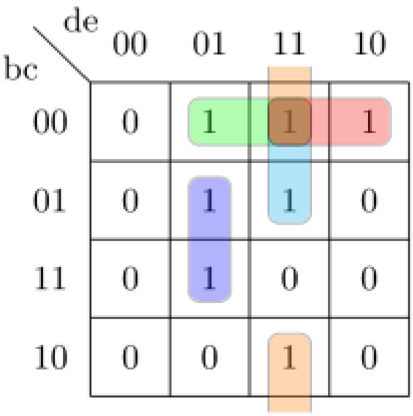
1. la funzione booleana che vale 1 solo quando il numero ha valore pari ad 1 o ad un numero primo;
2. l'espressione minima, nelle forme SP e PS, della funzione booleana determinata al punto precedente.

Soluzione

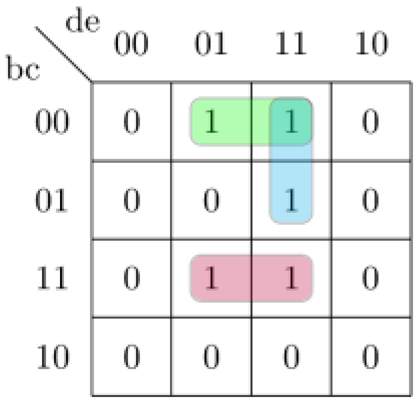
1. $f(a, b, c, d, e) = \sum m(1,2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31)$

2. Espressione minima nella forma SP

$f(a, b, c, d, e) = \sum m(1,2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31)$
=> $f(a, b, c, d, e) = \bar{b}\bar{c}e + \bar{b}de + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}cd\bar{e} + \bar{a}\bar{c}de + abce$



a=0

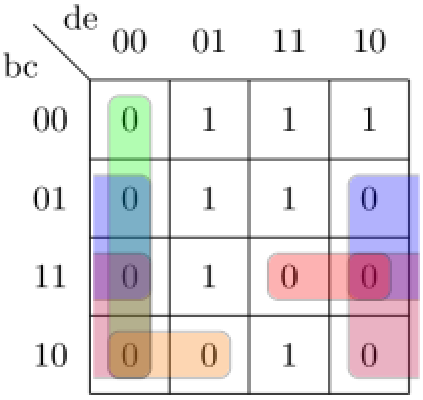


a=1

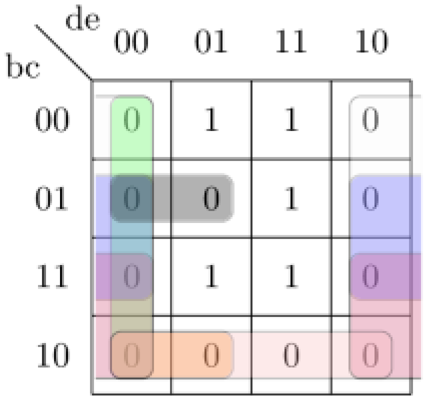
Espressione minima nella forma PS

$f(a, b, c, d, e) = \prod M(0,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,22,24,25,26,27,28,30)$ =>

$f(a, b, c, d, e) = (d + e)(\bar{c} + e)(\bar{b} + e)(\bar{b} + c + d)(a + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + e)(\bar{a} + b + \bar{c} + d)(\bar{a} + \bar{b} + c)$



a=0



a=1