Algebra di commutazione

Algebra Booleana - Introduzione

Per descrivere i dispositivi digitali è necessario avere

- Un modello che permetta di rappresentare insiemi di numeri binari;
- Le funzioni che li mettano in relazione.

Algebra Booleana

È una quintupla *<B, op1, op2, a, b>* dove:

- *B* è l'insieme in cui vengono eseguite le operazioni;
- *op1* e *op2* sono operazioni a due elementi che agiscono sugli elementi di *B*;
- *a* e *b* sono elementi neutri di *B* per le operazioni *op1* e *op2*.

Tra le possibili algebre Booleane quella a 2 valori è detta *Algebra di Commutazione*

Algebra di Commutazione

B: **{0, 1}**

op1: **AND**

- Vale 1 solo se applicata a due valori uguali a 1 altrimenti vale 0

op2: **OR**

- Vale 0 solo se applicata a due valori uguali a 0 altrimenti vale 1

a, *b*: **1, 0**

Dalla presenza di due soli valori in *B* è direttamente derivabile la seguente operazione a un valore:

NOT

- Vale 1 se applicata al valore 0 e 0 se è applicata al valore 1

Descrizione delle Funzioni

Una generica funzione dell'algebra di commutazione può essere descritta in 3 modi

1. $f(B^n) \rightarrow B^m$
2. $f_i(B^n) \rightarrow B$, $i = 1,2,\ldots,m$
3. Tabella della verità

Esempi

AND: $B \times B \rightarrow B$

OR: $B \times B \rightarrow B$

NOT: $B \rightarrow B$

Tabelle della Verità

AND		
x	y	z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR		
x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT	
x	z
0	1
1	0

Simbologia

Utilizzando le tre operazioni elementari si possono scrivere delle espressioni tra variabili di commutazione che descrivono in forma compatta il comportamento delle funzioni

Simbologia

$z = \mathrm{AND}(x, y) \rightarrow z = x \cdot y \rightarrow z = xy$

$z = \mathrm{OR}(x, y) \rightarrow z = x + y$

$z = \mathrm{NOT}(x) \rightarrow z = \underline{x}$

Identità e Teoremi (1 di 2)

Identità

$1 \cdot x = x$

$0 + x = x$

Elemento nullo

$0 \cdot x = 0$

$1 + x = 1$

Idempotenza

$x \cdot x = x$

$x + x = x$

Inverso

$x \cdot \underline{x} = 0$

$x + \underline{x} = 1$

Commutativa

$x \cdot y = y \cdot x$

$x + y = y + x$

Associativa

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

$(x+y)+z = x+(y+z)$

Identità e Teoremi (2 di 2)

Assorbimento

$$x \cdot (x + y) = x$$

$$x + x \cdot y = x$$

Distributiva

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$$

De Morgan

$$\underline{x \cdot y} = \underline{x} + \underline{y}$$

$$\underline{x + y} = \underline{x} \cdot \underline{y}$$

Teorema di Shannon

Data una funzione Booleana $f(B^n)=B$ è sempre vero che:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1 f(1,x_2,\ldots,x_n) + \underline{x}_1 f(0,x_2,\ldots,x_n)$$

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (x_1+f(0,x_2,\ldots,x_n)) \bullet (\underline{x}_1+f(1,x_2,\ldots,x_n))$$

Principio di Dualità

Un'equazione booleana rimane valida se si considera il duale di entrambi i lati dell'uguaglianza

Il *duale* di un'espressione si ottiene

- Cambiando gli AND con gli OR e viceversa
- Cambiando gli 1 con 0 e viceversa

1. $x + xy = x(1 + y) = x$

2. $xy + x\underline{y} = x(y + \underline{y}) = x$

3. $x + \underline{x}y = (x + \underline{x})(x + y) = x + y$

duale

1d. $x(x + y) = x + (0 \bullet y) = x$

2d. $(x + y)(x + \underline{y}) = x + (y\underline{y}) = x$

3d. $x(\underline{x} + y) = x\underline{x} + xy = xy$

Teorema del Consenso

$$\boxed{xy + \underline{x}z + yz = xy + \underline{x}z}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} xy + \underline{x}z + yz &= xy + \underline{x}z + yz(x + \underline{x}) = xy + \underline{x}z + xyz + \underline{x}yz = \\ &= xy + xyz + \underline{x}z + \underline{x}yz = xy(1 + z) + \underline{x}z(1 + y) = \\ &= xy + \underline{x}z \end{aligned}$$

□

Per il *principio di dualità* si ha

$$\boxed{(x + y)(\underline{x} + z)(y + z) = (x + y)(\underline{x} + z)}$$

Esercizio

Semplificare l'espressione booleana $(a + b)(\underline{a} + c)$

$$(a + b)(\underline{a} + c) = a\underline{a} + ac + \underline{a}b + bc =$$

$$= \boxed{ac + \underline{a}b} + \boxed{bc} =$$

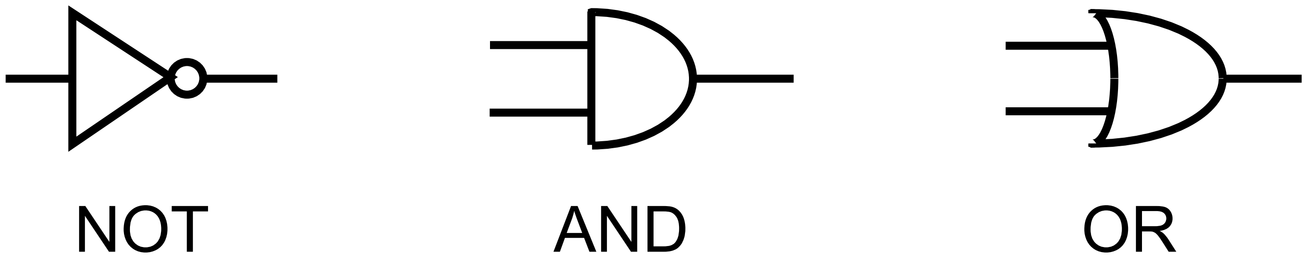
$$= ac + \underline{a}b$$

Dalla Funzione al Circuito

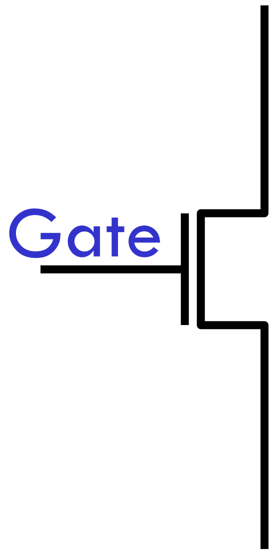
Per costruire un circuito digitale che si comporti come una espressione è necessario trovare degli equivalenti elettrici per le variabili e per gli operatori

Variabile → Conduttore

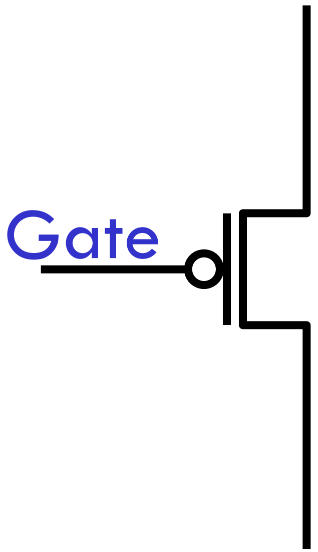
Operatori → Porte logiche



Transistori di tipo N e P



Tipo N

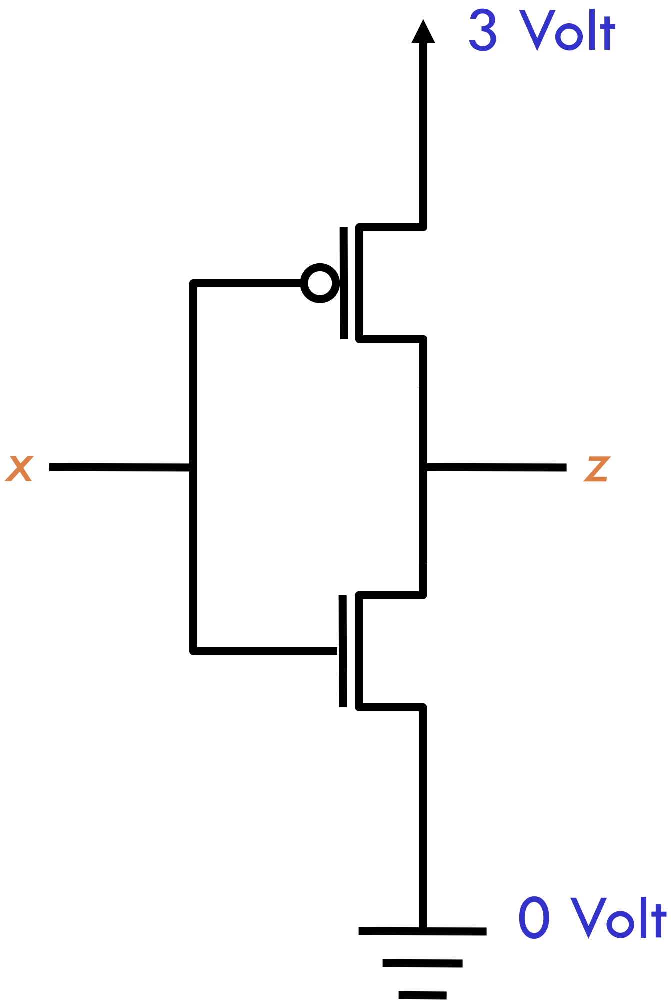


Tipo P

Gate =1, conduzione

Gate =0, conduzione

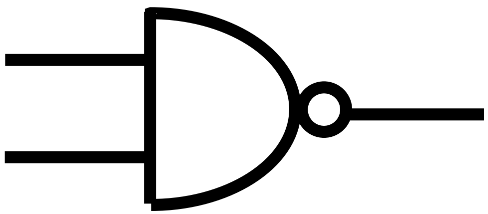
Porta logica NOT



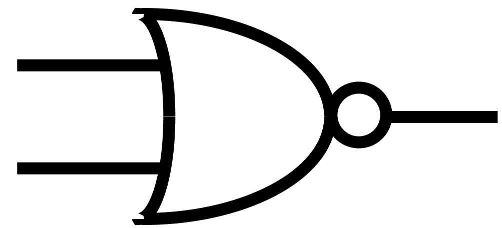
NOT	
x	z
0	1
1	0

Altre Porte Logiche

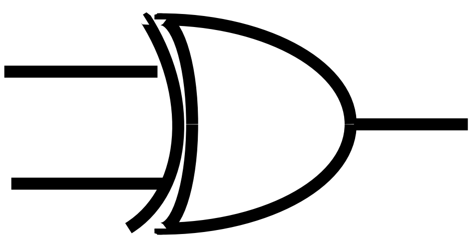
NAND		
x	y	z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



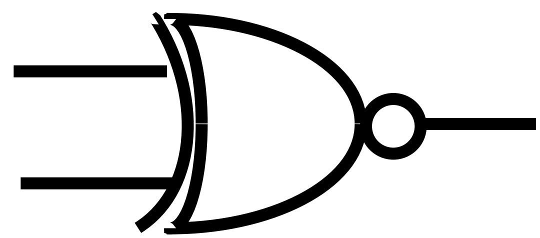
NOR		
x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



XOR		
x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



XNOR		
x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Operatori Universali (1 di 2)

Gli operatori universali (o funzionalmente completi) consentono di rappresentare una qualsiasi funzione di commutazione.

AND, **NOT** sono operatori universali

$X \text{ or } Y = (X \text{ or } Y)'' = (X' \text{ and } Y')'$

OR e **NOT** sono operatori universali

$X \text{ and } Y = (X \text{ and } Y)'' = (X' \text{ or } Y')'$

Operatori Universali (2 di 2)

NAND è un operatore universale

X’ = X nand X

X and Y = (X nand Y)’

X or Y = (X or Y)’’ = (X’ and Y’)’ = X’ nand Y’

NOR è un operatore universale

X’ = X nor X

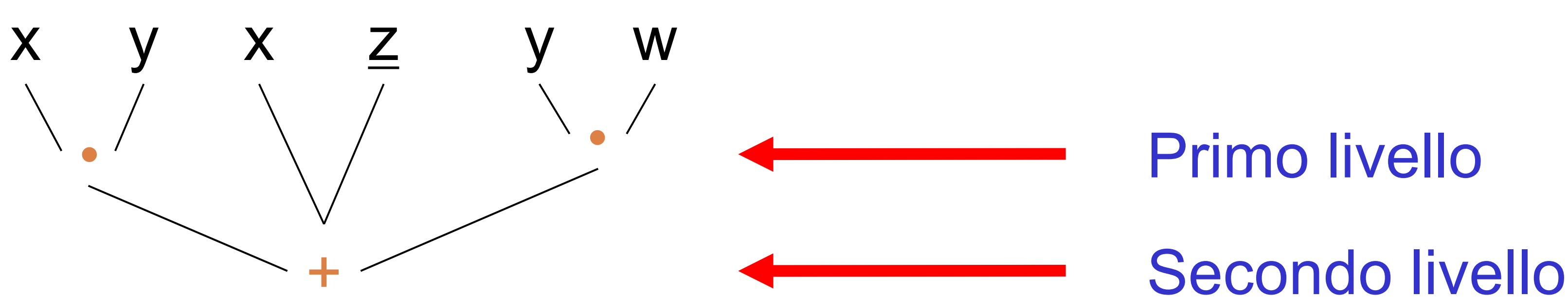
X or Y = (X nor Y)’

X and Y = (X and Y)’’ = (X’ or Y’)’ = X’ nor Y’

Espressioni Booleane

- Si definisce espressione booleana una combinazione di variabili booleane e costanti (0,1) attuata mediante gli operatori AND, OR e NOT
- Si definisce *numero di livelli* di una espressione il massimo tra i numeri di operazioni che agiscono in cascata sui *letterali*

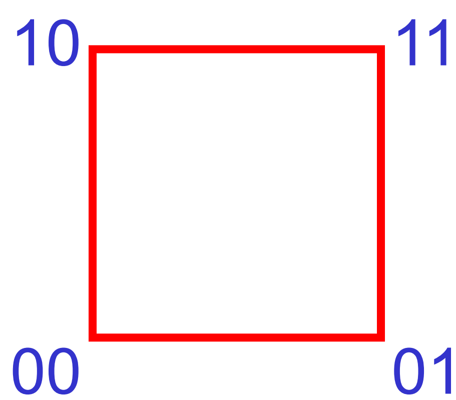
$x \bullet y + x + \underline{z} + y \bullet w$

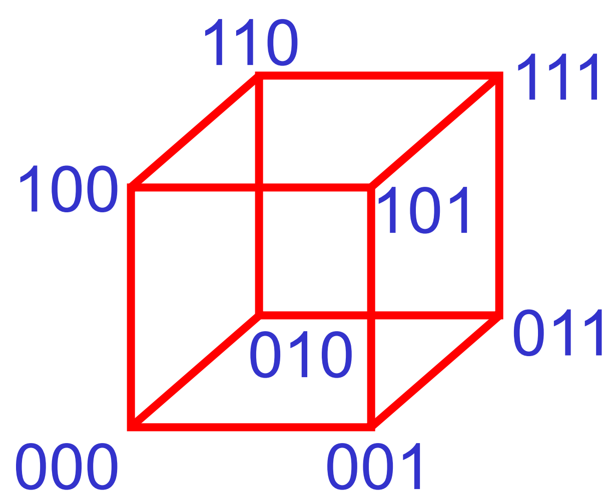


Forme Canoniche

Sia $f(B^n)=B$ una funzione Booleana ad una sola uscita completamente specificata

Le 2^n configurazioni degli ingressi possono essere mappate sui vertici di un n-cubo in modo tale che due punti adiacenti siano a distanza di Hamming pari a 1

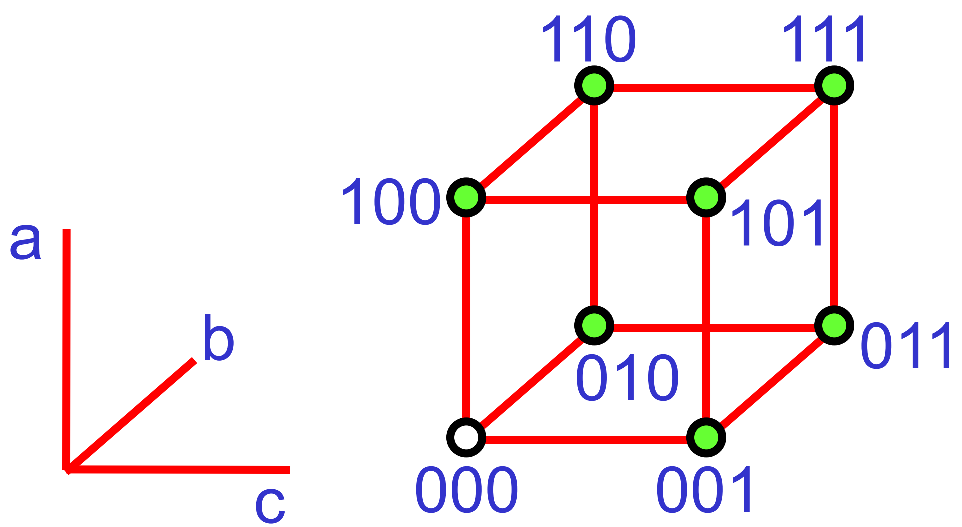




Forme Canoniche

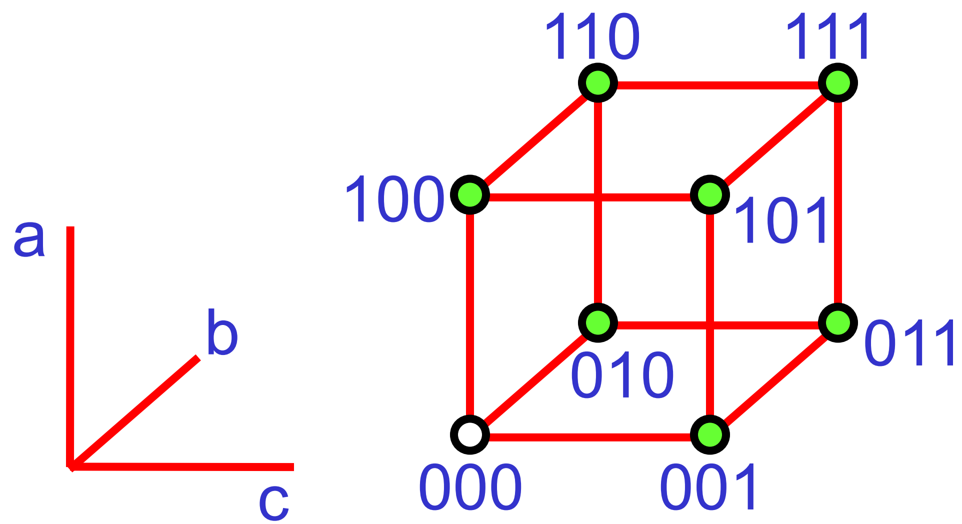
Si consideri per esempio $n=3$ (variabili *a*, *b*, *c*)

Gli spigoli del cubo saranno indicati con un pallino pieno se in corrispondenza di quel valore di ingresso la funzione vale 1 e con un pallino vuoto altrimenti



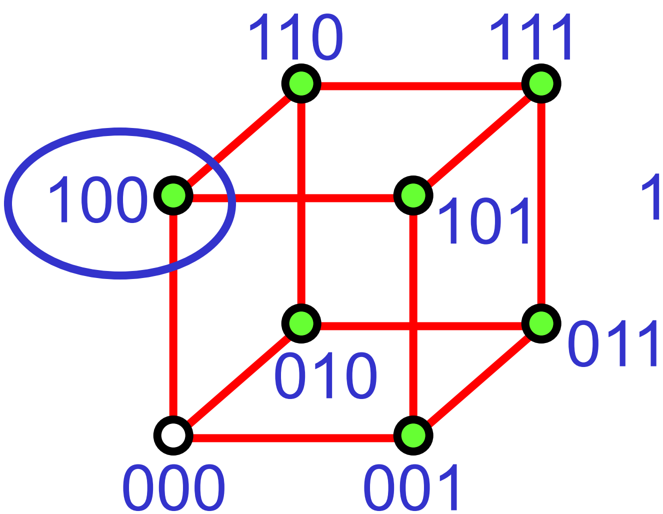
Forme Canoniche (Definizioni)

- **Letterale**: coppia variabile valore
  - (a,0), (a,1), (b,0), (b,1), (c,0), (c,1)
  - Per brevità i suddetti saranno indicati rispettivamente come: $\underline{a}$,a,$\underline{b}$,b,$\underline{c}$,c
- **Implicante**: prodotto di letterali tale che se tale prodotto vale 1 anche *f* vale 1
  - Esempio: a, b, c, ab, abc, a$\underline{b}$c, … sono implicanti per questa funzione

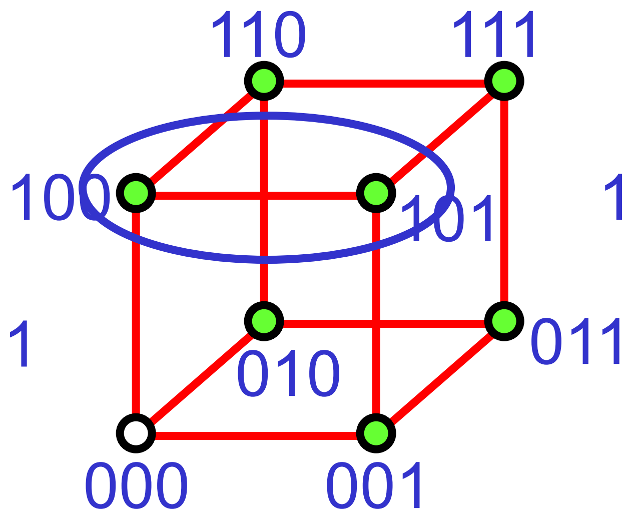


Forme Canoniche (Definizioni)

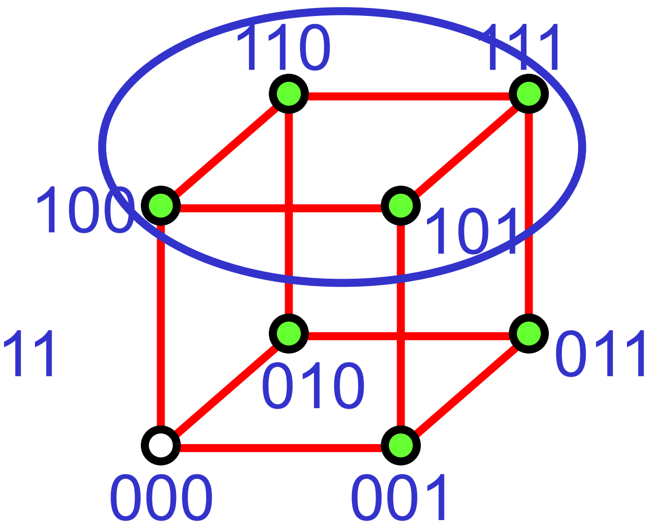
- **Implicante**: può essere visto come un sottocubo di soli 1 della funzione data. Cioè come un insieme di 2^k configurazioni di ingresso a *distanza di Hamming* unitaria



Implicante a$\underline{bc}$
(dimensione 1)



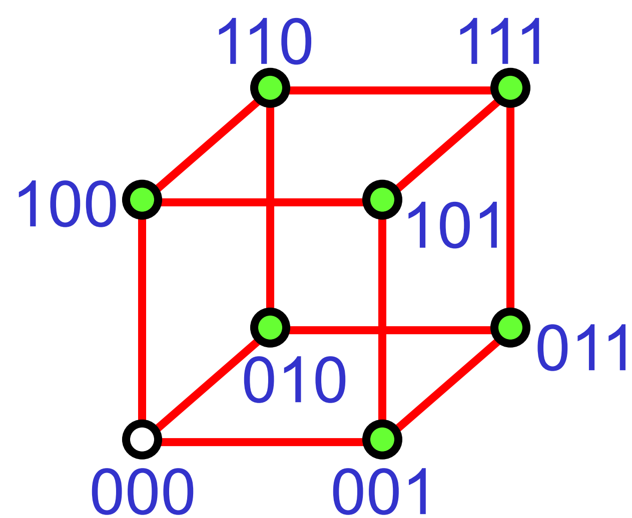
Implicante a$\underline{b}$
(dimensione 2)



Implicante a
(dimensione 4)

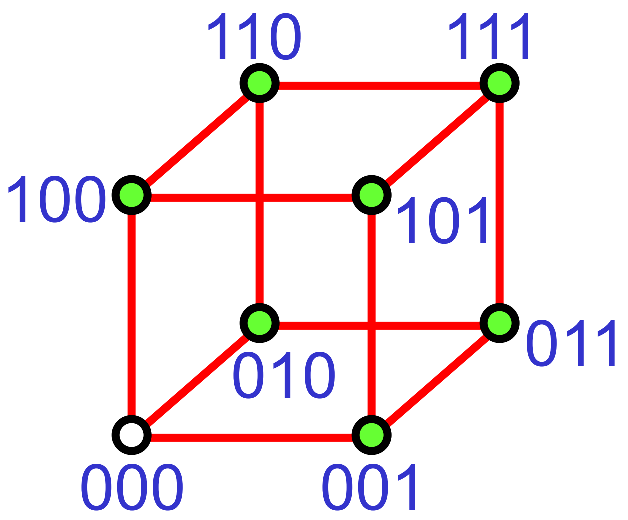
Forme Canoniche (Definizioni)

- **Mintermine**: un implicante in cui compaiono tutte le variabili di ingresso
  - $a\underline{bc}$, $ab\underline{c}$, abc, $a\underline{b}c$, $\underline{a}b\underline{c}$, $\underline{a}bc$, $\underline{ab}c$
  - NOTA: I mintermini di una funzione vengono spesso identificati con il numero in base 10 corrispondente al valore binario del mintermine. (Es., $a\underline{bc} = m_4$)
- **Maxtermine**: è un punto dello spazio B^n tale per cui la funzione calcolata in quel punto vale 0
- ***On-set***: Insieme dei mintermini
- ***Off-set***: Insieme dei maxtermini



Forme Canoniche (Definizioni)

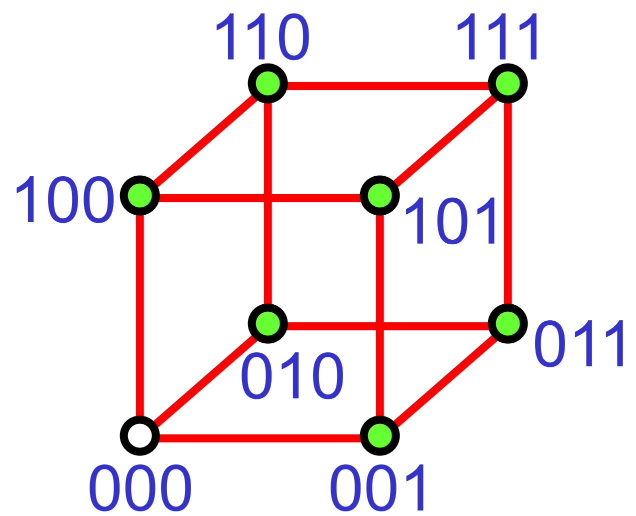
- **Implicante primo**: implicante tale che non esiste nessun altro implicante di dimensioni maggiori che lo contenga interamente



Es.: L'implicante abc non è primo perché è contenuto nell'implicante ab che è a sua volta contenuto nell'implicante a che è primo perché non è contenuto in nessun altro implicante

Forme Canoniche (Definizioni)

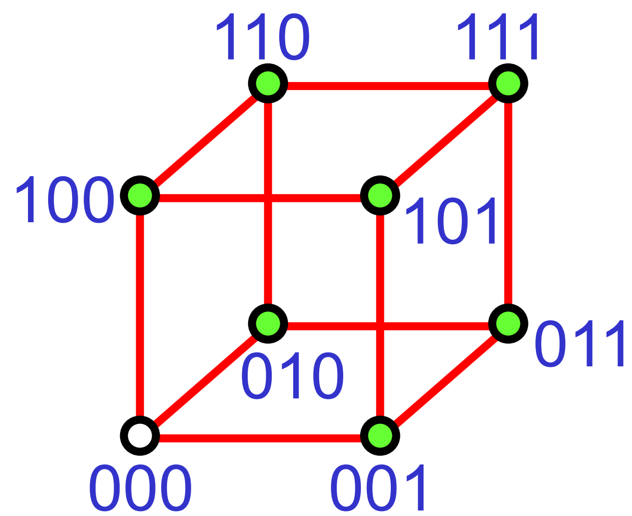
- **Implicante essenziale**: implicante primo che copre almeno un mintermine non coperto da altri implicanti primi



Es.: L'implicante primo c è essenziale perché copre il mintermine abc che non è coperto da nessun altro implicante primo.

Forme Canoniche (Definizioni)

- **Copertura di una funzione**: è un insieme di implicanti che coprono tutti i mintermini della funzione.



Es.: {a, b, c} è una copertura. {a, b, $\underline{ab}c$} è una copertura.

Prima Forma Canonica

- Sia $f(x_1,\ldots,x_n)$ una funzione Booleana
- Sia $\{m_1,m_2,\ldots,m_k\}$ l'O*n-set* della funzione
- La prima forma canonica di copertura della funzione (detta somma di prodotti) è:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$$

Seconda Forma Canonica

- Sia $f(x_1,...,x_n)$ una funzione Booleana
- Sia $\{M_1,M_2,...,M_k\}$ l'*Off-set* della funzione
- La seconda forma canonica di copertura della funzione (detta prodotto di somme) è:

$$f(x_1,...,x_n) = M_1 \bullet M_2 \bullet ... \bullet M_k$$

Esempio

o = f(a,b,c)			
a	**b**	**c**	**o**
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$m_0 = \underline{abc}$ quando $a=0,b=0,c=0 \rightarrow m_0=1$

$M_1 = a + b + \underline{c}$ quando $a=0,b=0,c=1 \rightarrow M_1=0$

$M_2 = a + \underline{b} + c$ quando $a=0,b=1,c=0 \rightarrow M_2=0$

$m_3 = \underline{a}bc$ quando $a=0,b=1,c=1 \rightarrow m_3=1$

$m_4 = a\underline{bc}$ quando $a=1,b=0,c=0 \rightarrow m_4=1$

$M_5 = \underline{a} + b + \underline{c}$ quando $a=1,b=0,c=1 \rightarrow M_5=0$

$M_6 = \underline{a} + \underline{b} + c$ quando $a=1,b=1,c=0 \rightarrow M_6=0$

$m_7 = abc$ quando $a=1,b=1,c=1 \rightarrow m_7=1$

On-set = $\{m_0, m_3, m_4, m_7\}$

PFC: $m_0 + m_3 + m_4 + m_7$

PFC: $\underline{abc} + \underline{a}bc + a\underline{bc} + abc$

Off-set = $\{M_1, M_2, M_5, M_6\}$

SFC: $M_1 \, M_2 \, M_5 \, M_6$

SFC: $(a+b+\underline{c})\,(a+\underline{b}+c)\,(\underline{a}+b+\underline{c})\,(\underline{a}+\underline{b}+c)$

Forme Negate

Un mintermine ed un maxtermine identificati dallo stesso pedice sono l'uno il complemento dell'altro: $M_i = \underline{m}_i$

Es: $\underline{m}_3 = \text{NOT}(\underline{x}yz) = x + \underline{y} + \underline{z} = M_3$

È possibile ricavare semplicemente le forme negate delle funzioni espresse in prima e seconda forma canonica

Es:

$$f = \sum_i m_i \rightarrow \underline{f} = \text{NOT}(\textstyle\sum_i m_i) \rightarrow \textit{De Morgan} \rightarrow \underline{f} = \prod_i \underline{m}_i \rightarrow \underline{f} = \prod_i M_i$$

Es:

$$f = \prod_i M_i \rightarrow \underline{f} = \text{NOT}(\textstyle\prod_i M_i) \rightarrow \textit{De Morgan} \rightarrow \underline{f} = \sum_i \underline{M}_i \rightarrow \underline{f} = \sum_i m_i$$

Forme Negate

Esempio

$$\underline{\textbf{PFC:}}\ f = m_0 + m_3 + m_4 + m_7$$

$$\underline{f} = M_0\ M_3\ M_4\ M_7$$

$$\underline{f} = (a+b+c)(a+\underline{b}+\underline{c})(\underline{a}+b+c)(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})$$

$$\underline{\textbf{SFC:}}\ f = M_1\ M_2\ M_5\ M_6$$

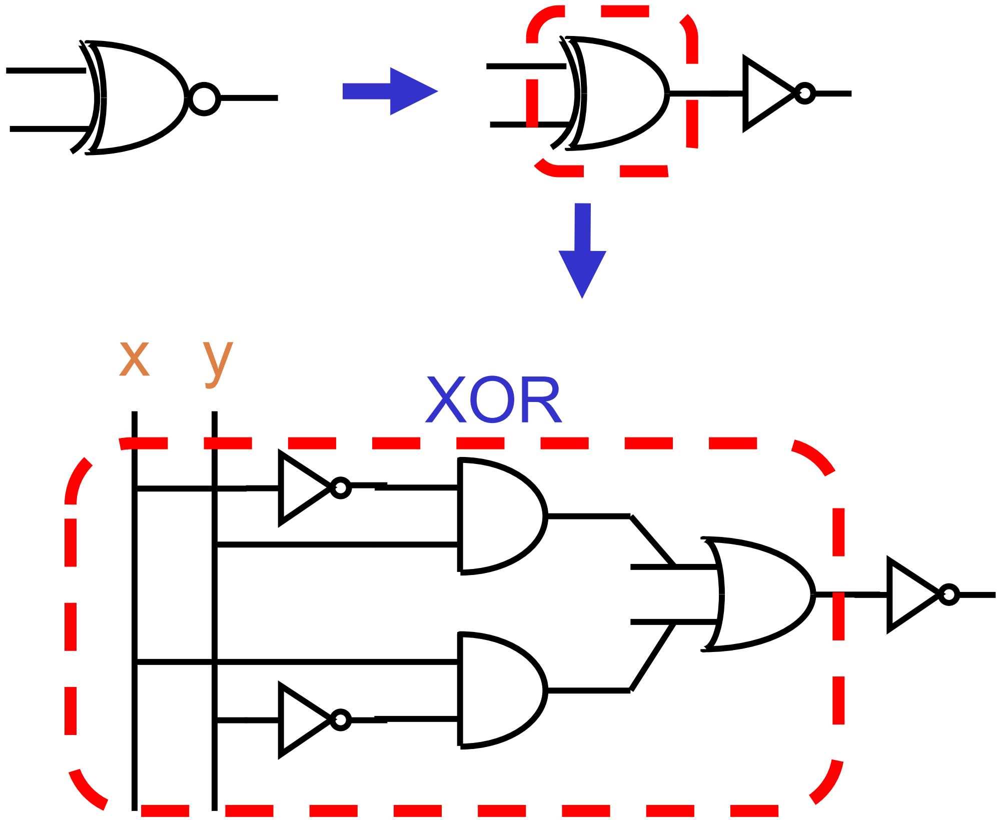
$$\underline{f} = m_1 + m_2 + m_5 + m_6$$

$$\underline{f} = \underline{abc} + \underline{a}b\underline{c} + a\underline{b}c + ab\underline{c}$$

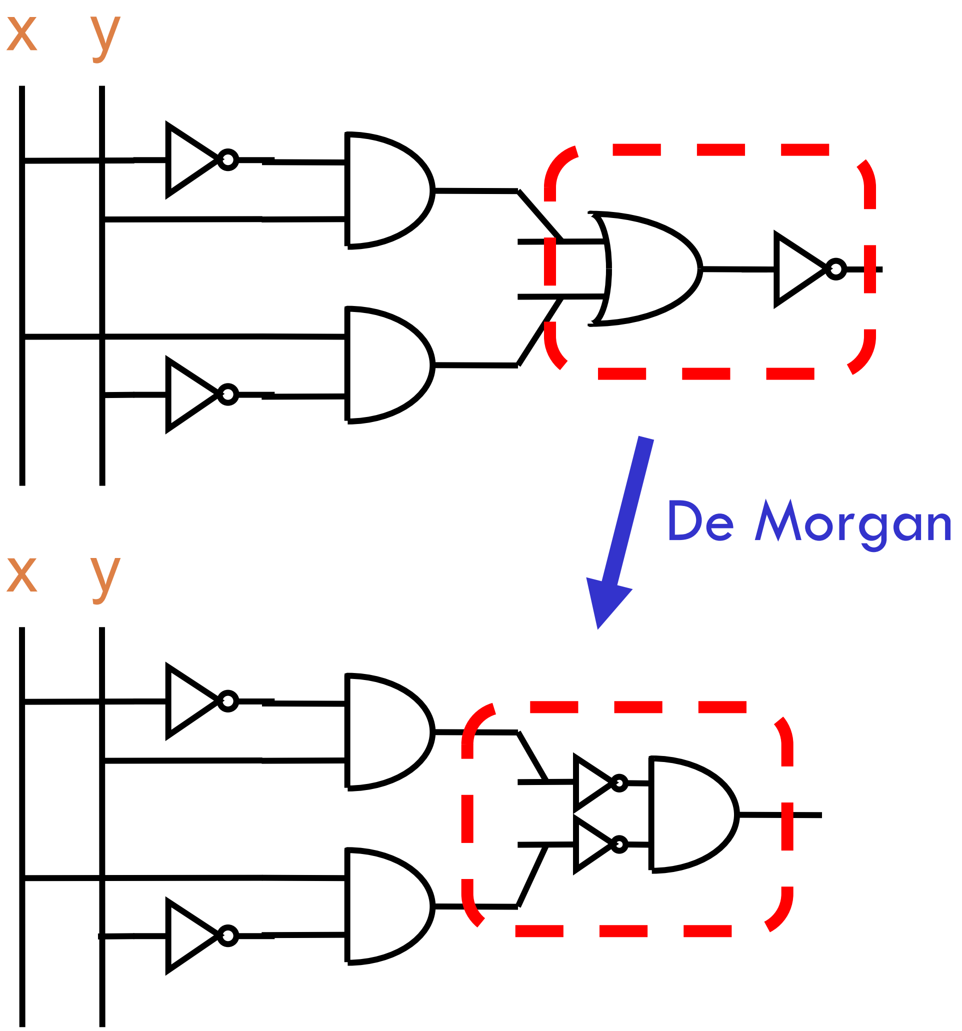
Esercizio 1

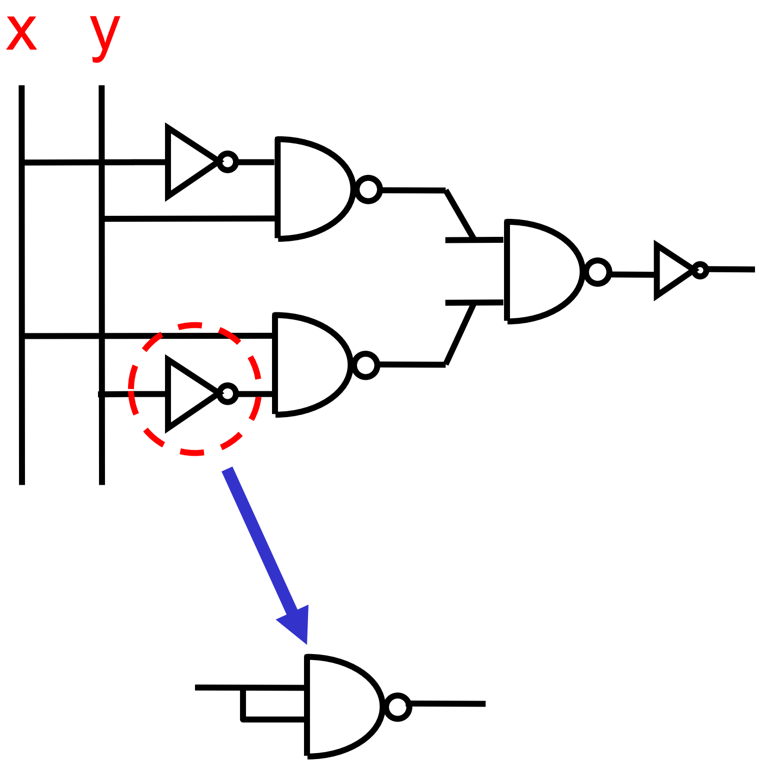
Si descriva in termini di porte logiche NAND, a uno e due ingressi, la funzionalità della porta logica XNOR.

XNOR		
x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Esercizio 1 (cont.)





Esercizio 2

Si scriva la tabella della verità della funzione Booleana *o=f(a,b,c)*, tale che o vale 1 solo se la somma (senza riporto) dei bit sulle linee *a* e *b* è uguale al valore della linea c e si ricavi l'*On-set*.

o = f(a,b,c)			
a	**b**	**c**	**o**
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

On-set

$m_0 = \underline{abc}$

$m_3 = \underline{a}bc$

$m_5 = a\underline{b}c$

$m_6 = ab\underline{c}$

Esercizio 3

Si consideri un circuito combinatorio che ha due ingressi a 2 bit: $A(a_1,a_0)$ e $B(b_1,b_0)$, un ingresso *op* a 1 bit e un'uscita *out* a 1 bit. Se $op=0$, *out* vale 1 se $A>B$. Se $op=1$, *out* vale 1 se $A=B$.

Definire l'O*n-set* della funzione $out(op,a_1,a_0,b_1,b_0)$.

Esercizio 3 (cont.)

Soluzione

Non è agevole procedere come prima costruendo la tabella della verità che in questo caso conterrebbe un numero di righe pari a $2^5=32$.

Generiamo quindi direttamente i mintermini

out vale 1 se $op=0$ (cioè $\underline{op}$) **E** se $A>B$ [cioè se $a_1=b_1$ (a_1b_1 **O** $\underline{a}_1\underline{b}_1$) **E** $a_0=1$ (a_0) **E** $b_0=0$ ($\underline{b}_0$) **OPPURE se** $a_1=1$ (a_1) **E** $b_1=0$ ($\underline{b}_1$)]

Quindi la precedente diventa (gli **E** diventano AND ($\bullet$) e gli **O** diventano OR ($+$)): $\underline{op}((a_1b_1+\underline{a}_1\underline{b}_1)\bullet a_0\bullet \underline{b}_0+a_1\bullet \underline{b}_1)$

Allo stesso modo si ha per la seconda: $op((\underline{a}_0\underline{b}_0+a_0b_0)(\underline{a}_1\underline{b}_1+a_1b_1))$

$\underline{op}a_1a_0b_1\underline{b}_0=m_{14}$, $\underline{opa}_1a_0\underline{b}_1\underline{b}_0=m_4$, etc.

Esercizio 4

Si scriva l'espressione secondo la prima forma canonica della funzione $f(a,b,c)$ che ha On-*set* = $\{m_2,m_4,m_5,m_7\}$

Esercizio 4 (cont.)

Soluzione

$m_2 = m_{010} = \underline{a}b\underline{c}$

$m_4 = m_{100} = a\underline{bc}$

$m_5 = m_{101} = a\underline{b}c$

$m_7 = m_{111} = abc$

$f(a,b,c) = \underline{a}b\underline{c} + a\underline{bc} + a\underline{b}c + abc$

Esercizio 5

Si scriva l'espressione secondo la seconda forma canonica della funzione $f(a,b,c)$ che ha

O*n-set* = $\{m_2, m_4, m_5, m_7\}$

Esercizio 5 (cont.)

Soluzione

$f(a,b,c) = M_0\, M_1\, M_3\, M_6$

$M_0 = M_{000} = a+b+c$

$M_1 = M_{001} = a+b+\underline{c}$

$M_3 = M_{011} = a+\underline{b}+\underline{c}$

$M_6 = M_{110} = \underline{a}+\underline{b}+c$

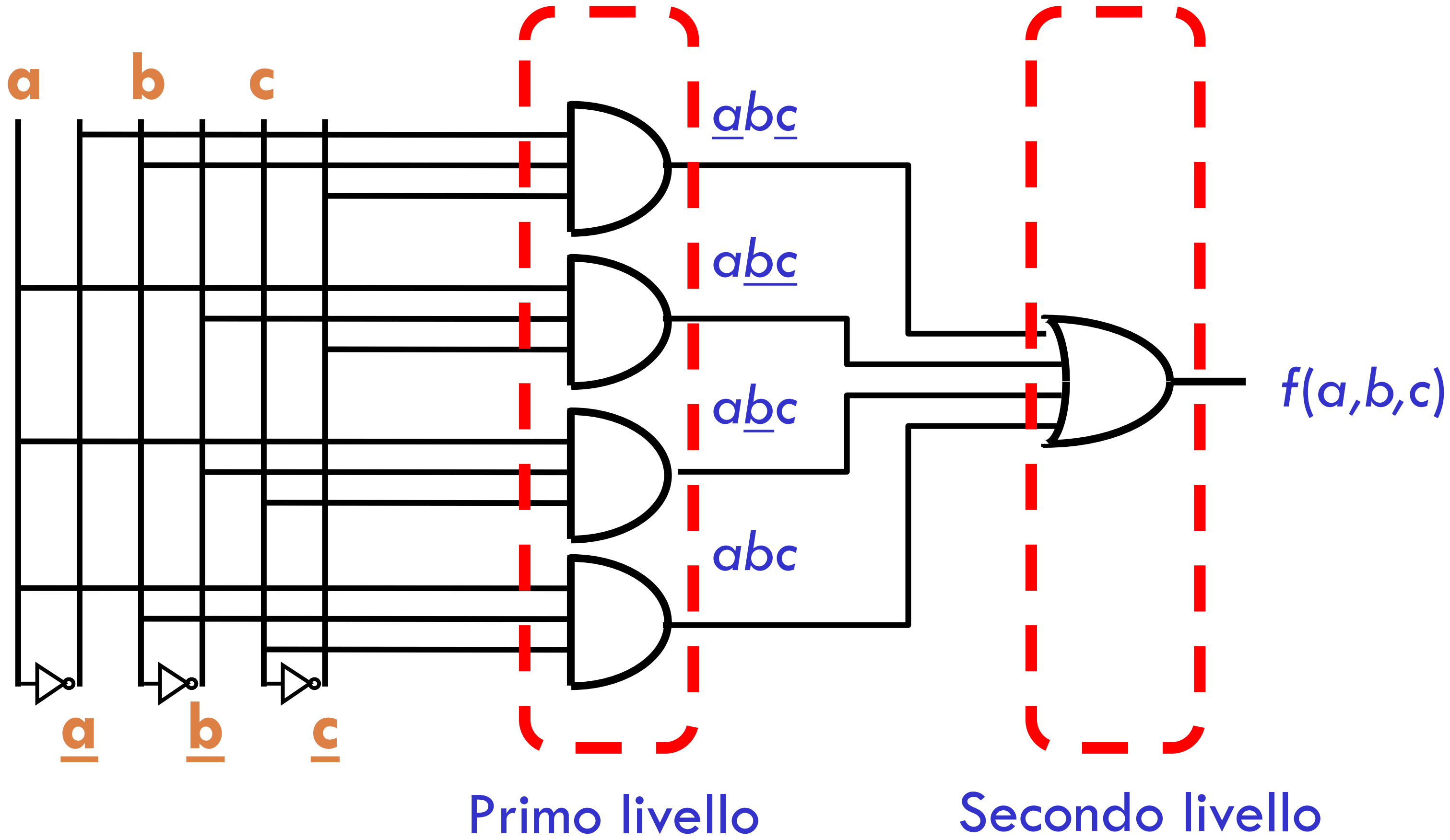
$f(a,b,c) = (a+b+c)\bullet(a+b+\underline{c})\bullet(a+\underline{b}+\underline{c})\bullet(\underline{a}+\underline{b}+c)$

Esercizio 6

Si disegni il circuito a due livelli corrispondente all'espressione in somma di prodotti della funzione dell'Esercizio 4

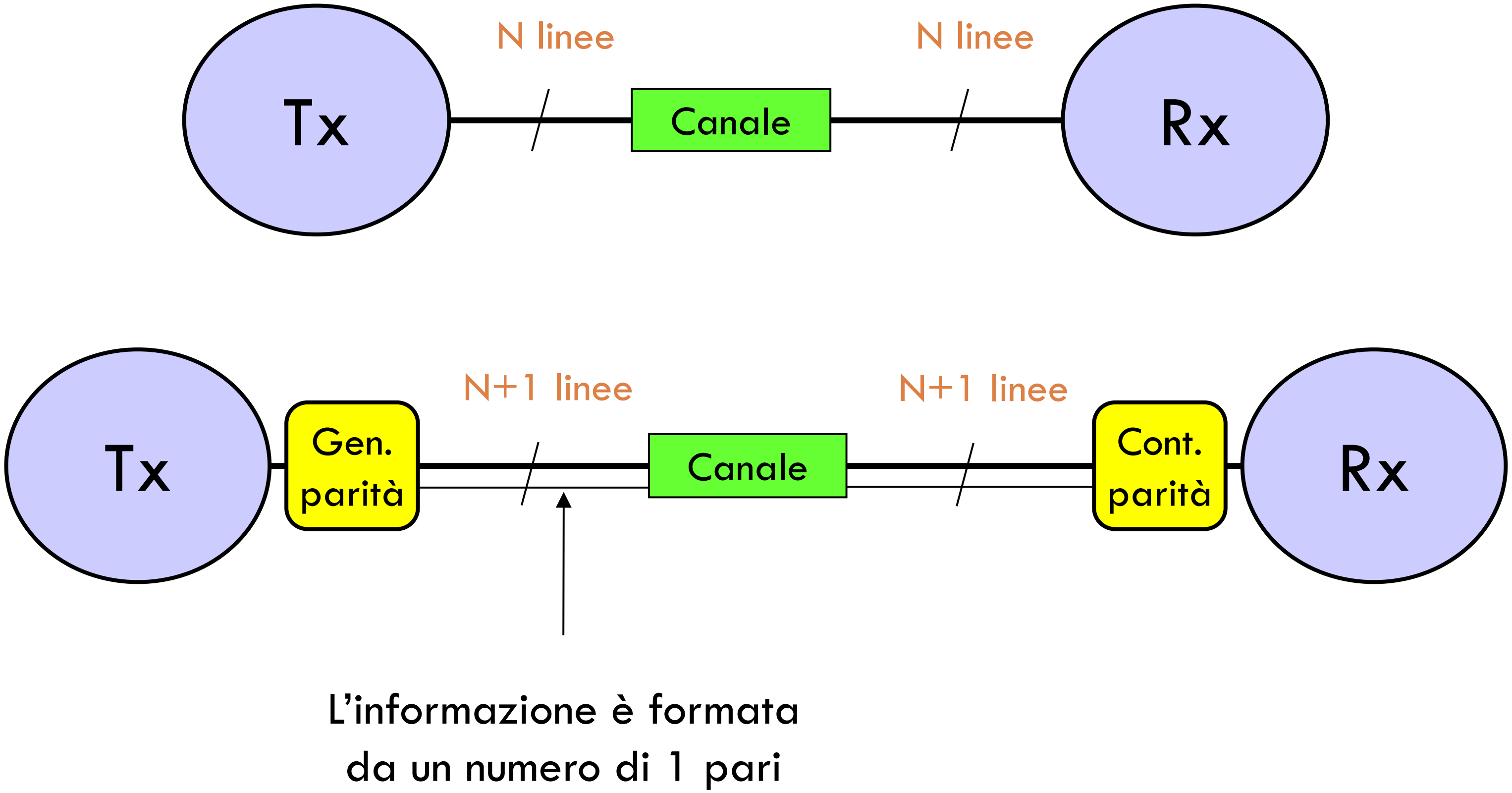
$$f(a,b,c) = \underline{a}b\underline{c} + a\underline{bc} + a\underline{b}c + abc$$

Esercizio 6 (cont.)

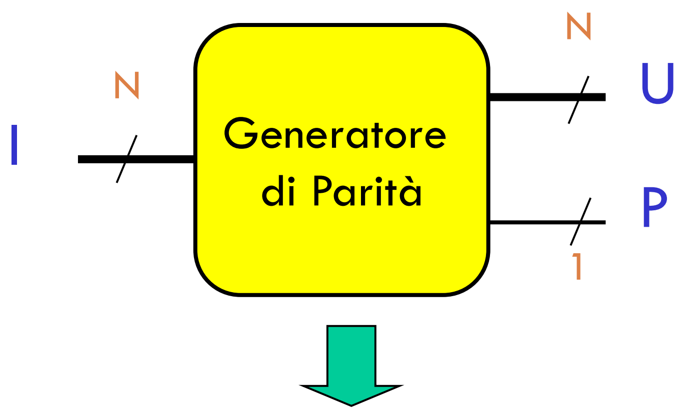


Esercizio 7

Progettare un generatore ed un controllore di parità

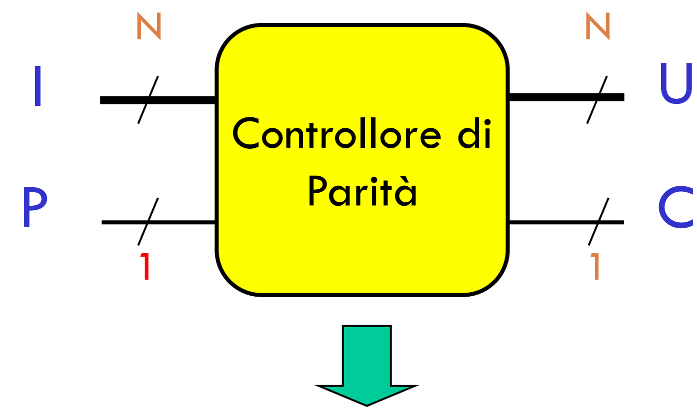


Esercizio 7 (cont.)



U = I

$$P = \begin{cases} 1 & \text{se il numero di 1 in I è dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

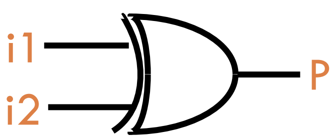


U = I

$$C = \begin{cases} 1 & \text{se il numero di 1 in } I \cup P \text{ è dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

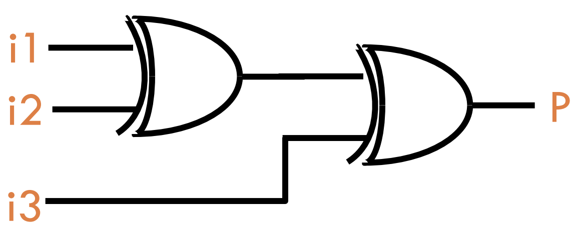
Esercizio 7 (cont.)

XOR		
i1	**i2**	**P**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



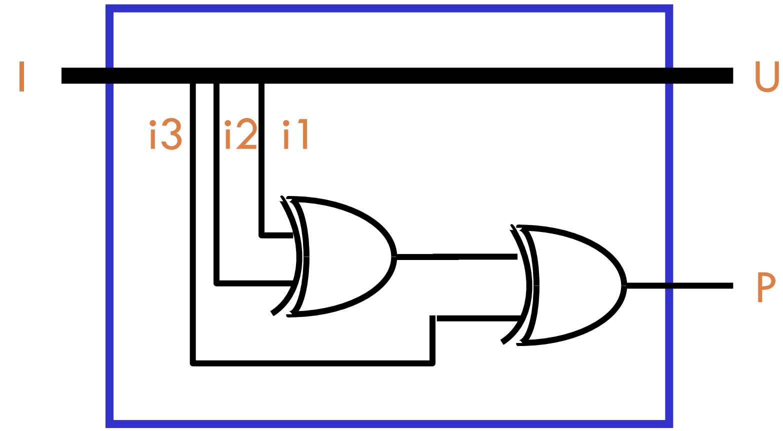
$P = i1 \oplus i2$

XOR			
i1	**i2**	**i3**	**P**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



$P = i1 \oplus i2 \oplus i3$

Generatore di Parità



Controllore di Parità