



Esempi di minimizzazione mediante il metodo di Quine McCluskey

$$f(a,b,c,d)=\Sigma(0,1,4,5,13,14)$$

G_0^0	0000	0	✓
G_1^0	0001	1	✓
	0100	4	✓
G_2^0	0101	5	✓
G_3^0	1101	13	✓
	1110	14	

Il termine 14 non è
riducibile, è un
implicante primo

G_0^1	000-	0,1	✓
	0-00	0,4	✓
G_1^1	0-01	1,5	✓
	010-	4,5	✓
G_2^1	-101	5,13	

Il termine 5,13 non è
riducibile, è un
implicante primo

G_0^2 0-0- 0,1,4,5

Il termine 0,1,4,5 non
è riducibile, è un
implicante primo

Gli implicanti primi della f sono:

$P0(14)=abc\underline{d}$

$P1(5,13)=b\underline{c}d$

$P2(0,1,4,5)=a\underline{c}$

$$f(a,b,c,d)=\Sigma(0,1,4,5,13,14)$$

	0	1	4	5	13	14
P0						*
P1				*	*	
P2	*	*	*	*		

P0 è essenziale poiché è l'unico a coprire 14

P1 è essenziale poiché è l'unico a coprire 13

P2 è essenziale poiché è l'unico a coprire 0,1,4

$$f(a,b,c,d)=P0+P1+P2= abcd_{\underline{d}}+ b_{\underline{c}}d+ \underline{a}c$$

$$f(a,b,c,d)=\Sigma(0,2,4,5,6,7,8,9,13,15)$$

G_0^0	0000	0	✓	G_0^1	00-0	0,2	✓	G_0^2 0--0 0,2,4,6 G_1^2 01-- 4,5,6,7 G_2^2 -1-1 5,7,13,15 Implicanti primi
	0010	2	✓		0-00	0,4	✓	
G_1^0	0100	4	✓		-000	0,8		
	1000	8	✓		0-10	2,6	✓	
	0101	5	✓	G_1^1	010-	4,5	✓	
G_2^0	0110	6	✓		01-0	4,6	✓	
	1001	9	✓		100-	8,9		
G_3^0	0111	7	✓		01-1	5,7	✓	
G_4^0	1101	13	✓	G_2^1	-101	5,13	✓	
	1111	15	✓		011-	6,7	✓	
					1-01	9,13		
				G_3^1	-111	7,15	✓	
					11-1	13,15	✓	

Implicanti Primi: $P0(0,8)=\underline{abc}$ $P1(8,9)=\underline{abc}$ $P2(9,13)=\underline{acd}$

$P3(0,2,4,6)=\underline{ad}$ $P4(4,5,6,7)=\underline{ab}$ $P5(5,7,13,15)=\underline{bd}$

$$f(a,b,c,d)=\Sigma(0,2,4,5,6,7,8,9,13,15)$$

	0	2	4	5	6	7	8	9	13	15
P0	*						*			
P1							*	*		
P2								*	*	
P3	*	*	*		*					
P4			*	*	*	*				
P5				*		*			*	*

P3 è essenziale poiché
è l'unico a coprire 2

P5 è essenziale poiché
è l'unico a coprire 15

Vengono eliminate le
righe P3 e P5

Insieme iniziale di
copertura={P3,P5}

	8	9
P0	*	
P1	*	*
P2		*
P4		

P1 domina P0 e P2
Vengono eliminate
P0 e P2

P1

	8	9
P1	*	*

Insieme di
copertura
{P1,P3,P5}

$$f(a,b,c,d)=P1+P3+P5= \underline{abc} + \underline{ad} + bd$$

$$f(a,b,c,d)=\Sigma(0,2,8,10,11)+d(4,6,7)$$

G_0^0	0000	0	✓	G_0^1	00-0	0,2	✓		
	0010	2	✓		0-00	0,4	✓		
G_1^0	0100	4	✓		-000	0,8	✓	G_0^2	0--0
	1000	8	✓		0-10	2,6	✓	G_1^2	-0-0
G_2^0	0110	6	✓	G_1^1	-010	2,10	✓		0,2,4,6
	1010	10	✓		01-0	4,6	✓		0,2,8,10
G_3^0	0111	7	✓		10-0	8,10	✓		
	1011	11	✓	G_2^1	011-	6,7			
					101-	10,11			

Implicanti primi

Implicanti Primi:

$$P0(6,7)=\underline{a}bc$$

$$P1(10,11)=a\underline{b}c$$

$$P2(0,2,4,6)=a\underline{d}$$

$$P3(0,2,8,10)=b\underline{d}$$

$$f(a,b,c,d)=\Sigma(0,2,8,10,11)+d(4,6,7)$$

	0	2	8	10	11
P0					
P1				*	*
P2	*	*			
P3	*	*	*	*	

P0 non copre termini di Σ

P1 è essenziale poiché è l'unico a coprire 11

P3 è essenziale poiché è l'unico a coprire 8

Poiché P1 e P3 coprono tutti gli 1 di f, l'insieme di copertura è {P1,P3}

$$f(a,b,c,d)=P1+P3= \underline{a}bc + \underline{b}d$$

Esempio 1 di ricerca della copertura minima

	m1	m2	m3	m4	m5	m6	m7
P1	*	*		*			
P2		*				*	
P3			*		*		*
P4	*	*				*	
P5		*		*	*	*	



	M1	M2	M4	M6
P1	*	*	*	
P2		*		*
P4	*	*		*
P5		*	*	*



P3 è essenziale poiché è l'unico a coprire m3 e m7.

Dalla tabella degli implicant primi vengono eliminati P3 e gli mi coperti da esso.

Insieme di copertura = {P3}

P4 domina P2

P2 può essere eliminato

Insieme di copertura = {P3}

Esempio 1 di ricerca della copertura minima

	M1	M2	M4	M6
P1	*	*	*	
P4	*	*		*
P5		*	*	*



M2 domina gli altri mintermini

M2 può essere eliminato

Insieme di copertura = {P3}

	M1	M4	M6
P1	*	*	
P4	*		*
P5		*	*

La tabella degli implicant primari è ciclica

Per coprire M1, M4 e M6 abbiamo tre possibili coperture:

(P1, P4) oppure (P1, P5) oppure (P4, P5)

Se ad esempio P1 ha il maggior numero di letterali, la copertura sarà {P3, P4, P5}

Esempio 2 di ricerca della copertura minima

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
P1	*	*				
P2		*		*	*	
P3		*				*
P4			*		*	
P5	*			*		*

P4 è essenziale poiché è l'unico a coprire M3.

Dalla tabella degli implicant primari vengono eliminati P4 e gli M_i coperti da esso.

Insieme di copertura = {P4}

	M1	M2	M4	M6
P1	*	*		
P2		*	*	
P3		*		*
P5	*		*	*

La tabella degli implicant primari è ciclica

Insieme di copertura = {P4}

Esempio 2 di ricerca della copertura minima

Applichiamo il metodo del branch & bound per trovare gli altri implicant da aggiungere a P4

Se partiamo da P1, semplifichiamo la tabella eliminando P1 e i relativi mintermini

	M1	M2	M4	M6				
P1	*	*						
P2		*	*		P2	M4	M6	
P3		*		*	P3		*	
P5	*		*	*	P5	*	*	

➔

	M4	M6		
	*			
		*		
	*	*		

Per la dominanza di riga di P5 su P2 e P3 otteniamo

	M4	M6	
P5	*	*	

Otteniamo come Insieme di copertura = {P4, P1, P5}

Esempio 2 di ricerca della copertura minima

Se partiamo da P2, semplifichiamo la tabella eliminando P2 e i relativi mintermini

	M1	M2	M4	M6
P1	*	*		
P2		*	*	
P3		*		*
P5	*		*	*



P1
P3
P5

	M1	M6
P1	*	
P3		*
P5	*	*

Per la dominanza di riga di P5 su P1 e P3 otteniamo

P5

	M1	M6
P5	*	*

Otteniamo come Insieme di copertura = {P4, P2, P5} che non migliora la soluzione trovata precedentemente

Esempio 2 di ricerca della copertura minima

Se partiamo da P5, semplifichiamo la tabella eliminando P5 e i relativi mintermini

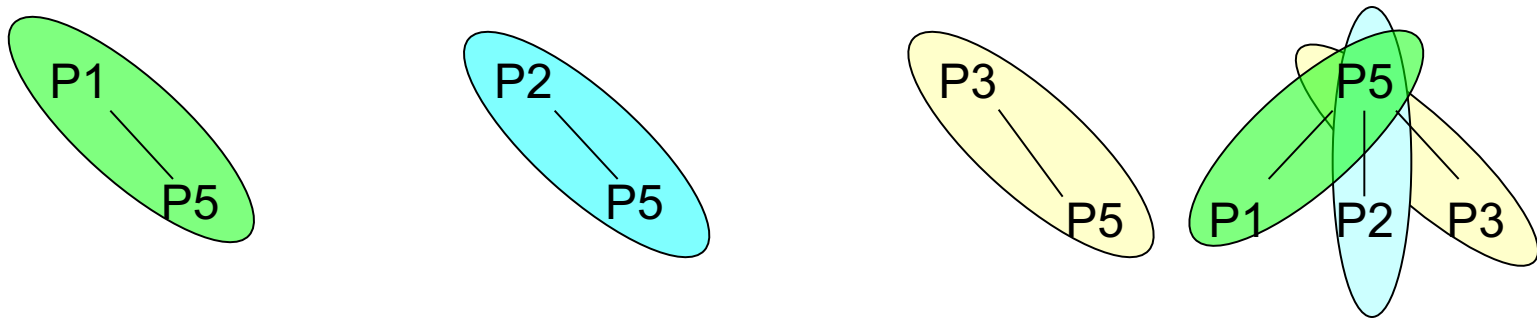
	M1	M2	M4	M6		M2
P1	*	*			P1	*
P2		*	*		P2	*
P3		*		*	P3	*
P5	*		*	*		

Per coprire M2 si sceglie uno tra P1, P2 e P3

Otteniamo ancora una volta un Insieme di copertura che non migliora la soluzione trovata precedentemente

Esempio 2 di ricerca della copertura minima

Applicando il metodo del branch & bound per trovare gli altri implicanti da aggiungere a P4 otteniamo dunque le seguenti coperture



Abbiamo 3 possibili coperture

Se P1, P2 e P3 hanno uguale numero di letterali la copertura dovrà contenere oltre a P4 e P5, uno qualsiasi tra P1, P2 e P3.

In caso contrario, la copertura dovrà contenere, oltre a P4 e P5, l'implicante (tra P1, P2 e P3) con il minor numero di letterali.

Esempio 3 di ricerca della copertura minima

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
P1	*	*				
P2				*	*	
P3			*			*
P4		*				*
P5	*		*		*	*

P2 è essenziale poiché è l'unico a coprire M4.

Dalla tabella degli implicant primi vengono eliminati P2 e gli M_i coperti da esso.

Insieme di copertura = {P2}

	M1	M2	M3	M6
P1	*	*		
P3			*	*
P4		*		*
P5	*		*	*

P5 domina P3

P3 può essere eliminato

Insieme di copertura = {P2}

Esempio 3 di ricerca della copertura minima

	M1	M2	M3	M6
P1	*	*		
P4		*		*
P5	*		*	*

P2 è un implicante essenziale secondario poiché è l'unico a coprire M3.

Dalla tabella degli implicanti primi vengono eliminati P5 e gli Mi coperti da esso.

Insieme di copertura = {P2, P5}

	M2
P1	*
P4	*

Se P1 e P4 hanno lo stesso numero di letterali, uno qualsiasi dei due può essere scelto.

Altrimenti, verrà scelto quello con il minor numero di letterali.