



Espressioni minime mediante il metodo di Quine-Mc Cluskey

Metodo di Quine-Mc Cluskey

Metodo di minimizzazione tabellare

- Facile da tradurre in un algoritmo.
- Il numero di variabili trattare è teoricamente illimitato.
- Facile da estendere al caso di funzioni a più di una uscita.

Consiste di due fasi:

- Ricerca degli implicant primari;
- Ricerca della copertura ottima.

Poiché queste due fasi hanno complessità esponenziale è praticamente impossibile trovare la soluzione ottima per un numero di variabili che supera l'ordine di una decina.

Metodo di Quine-Mc Cluskey

L'insieme di implicant primi di una funzione f è ottenuta applicando ripetutamente, in tutti i modi possibili, la semplificazione

$$x_i P + \underline{x}_i P = P$$

dove P è un prodotto di letterali scelti tra $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ in forma diretta o negata.

L'insieme di implicant è ottenuto partendo dai mintermini della funzione.

Le semplificazioni vengono applicate ai termini che differiscono in una sola posizione.

Metodo di Quine-Mc Cluskey

x	y	z	f	Punto di partenza						
0	0	0	1		x	y	z			
0	0	1	0		0	0	0			
0	1	0	0		0	1	1	√	→	x y z
0	1	1	1	⇒	1	0	1	√	→	- 1 1
1	0	0	0		1	1	1	√	→	1 - 1
1	0	1	1							
1	1	0	0							
1	1	1	1							

Nessuna riduzione

1. Si confrontano esaustivamente tutti i termini prodotto (ricavati dal passo precedente);
2. Si semplificano i termini che differiscono in una sola posizione;
3. Si marcano i termini semplificati per indicare che gli implicant non sono primi.

Metodo di Quine-Mc Cluskey

x	y	z	f	Punto di partenza						
0	0	0	1		x	y	z			
0	0	1	0		0	0	0			
0	1	0	0		0	1	1	√	→	x y z
0	1	1	1	⇒	1	0	1	√	→	- 1 1
1	0	0	0		1	1	1	√	→	1 - 1
1	0	1	1							
1	1	0	0							
1	1	1	1							

Nessuna riduzione

Si crea un nuovo insieme di termini prodotto da confrontare e si ripete il passo 1.

Il processo ha termine quando non ci sono elementi da semplificare

Metodo di Quine-Mc Cluskey

Per ridurre il numero di confronti, i termini vengono divisi in gruppi con elementi aventi lo stesso numero di 1.

I confronti vengono svolti solo tra termini relativi a gruppi che differiscono per un solo 1.

Ad ogni termine associamo un'etichetta che rappresenta l'insieme di mintermini che esso ricopre.

a	b	c	d	
0	0	0	0	0
0	0	1	0	2
0	1	0	0	4
0	0	1	1	3
0	1	1	0	6
1	1	0	0	12
0	1	1	1	7
1	1	1	0	14

← Etichetta

Vengono confrontati i gruppi

0 e 1

1 e 2

2 e 3

Metodo di Quine-Mc Cluskey

I passi da seguire per individuare gli implicant primari sono i seguenti:

1. Si suddividono i mintermini in gruppi G_i^0 contenenti termini con gli 1; Ciascun mintermine è etichettato con l'intero equivalente.
2. Partendo dal gruppo di indice i minimo, fino all'indice massimo -1 , vengono confrontati i termini del gruppo G_i^k con quelli del gruppo G_{i+1}^k .

Metodo di Quine-Mc Cluskey

Se due termini differiscono solo nella posizione j , essi vengono combinati in un unico termine che viene inserito in un nuovo gruppo G_i^{k+1} .

- In posizione j viene inserito un trattino “-”.
- I due termini vengono spuntati per indicare che non sono implicanti primi
- L’etichetta di questo nuovo termine è ottenuto concatenando le etichette dei termini di partenza.

Se sono possibili altre combinazioni, k è incrementato e si ritorna al passo 2)

Esempio

$$f(a,b,c,d)=\Sigma(1,9,11,12,13,14,15)$$

G_1^0	0001	1	✓
	1001	9	✓
G_2^0	1100	12	✓
	1011	11	✓
G_3^0	1101	13	✓
	1110	14	✓
G_4^0	1111	15	✓

G_1^1	-001	1,9	
	10-1	9,11	✓
G_2^1	1-01	9,13	✓
	110-	12,13	✓
	11-0	12,14	✓
G_3^1	1-11	11,15	✓
	11-1	13,15	✓
	111-	14,15	✓

G_2^2	1--1	9,11,13,15
	11--	12,13,14,15

Non sono
ulteriormente
riducibili

Implicanti Primi

P0(1,9): b c d

P1(9,11,13,15): a d

P2(12,13,14,15): a b

Esempio: comparatore ($a \leq b$) 2 bit (0)

a2	a1	b2	b1	q
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

G_0^0	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	1
G_1^0	0	0	1	0	2
	0	0	1	1	3
G_2^0	0	1	0	1	5
	0	1	1	0	6
	1	0	1	0	10
G_3^0	0	1	1	1	7
	1	0	1	1	11
G_4^0	1	1	1	1	15

Esempio: comparatore ($a \leq b$) 2 bit (1)

G_0^0	0	0	0	0	0	√
G_1^0	0	0	0	1	1	√
	0	0	1	0	2	√
G_2^0	0	0	1	1	3	√
	0	1	0	1	5	√
	0	1	1	0	6	√
G_3^0	1	0	1	0	10	√
	0	1	1	1	7	√
G_4^0	1	0	1	1	11	√
	1	1	1	1	15	√

G_0^1	0	0	0	-	0,1
	0	0	-	0	0,2
G_1^1	0	0	-	1	1,3
	0	-	0	1	1,5
	0	0	1	-	2,3
	0	-	1	0	2,6
	-	0	1	0	2,10
G_2^1	0	-	1	1	3,7
	-	0	1	1	3,11
	0	1	-	1	5,7
	0	1	1	-	6,7
	1	0	1	-	10,11
G_3^1	-	1	1	1	7,15
	1	-	1	1	11,15

Esempio: comparatore ($a \leq b$) 2 bit (2)

G_0^1	0	0	0	-	0,1	✓
	0	0	-	0	0,2	✓
G_1^1	0	0	-	1	1,3	✓
	0	-	0	1	1,5	✓
	0	0	1	-	2,3	✓
	0	-	1	0	2,6	✓
G_2^1	-	0	1	0	2,10	✓
	0	-	1	1	3,7	✓
	-	0	1	1	3,11	✓
	0	1	-	1	5,7	✓
G_3^1	0	1	1	-	6,7	✓
	1	0	1	-	10,11	✓
	-	1	1	1	7,15	✓
	1	-	1	1	11,15	✓

G_0^2	0	0	-	-	0,1,2,3
G_1^2	0	-	-	1	1,3,5,7
G_2^2	0	-	1	-	2,3,6,7
	-	0	1	-	2,10,3,11
	-	-	1	1	3,7,11,15

Implicanti Primi

P0(0,1,2,3): a2 a1

P1(1,3,5,7): a2 b1

P2(2,3,6,7): a2 b2

P3(2,3,10,11): a1 b2

P4(3,7,11,15): b2 b1

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Essa viene realizzata mediante la tabella degli implicant primari.

La tabella degli implicant primari è una matrice binaria dove:

- gli indici delle righe sono gli implicant primari individuati;
- gli indici delle colonne sono i mintermini della funzione;
- l'elemento $a_{i,j}$ della matrice assume il valore * (o 1) se il mintermine della colonna j è coperto dall'implicante della riga i .

P0 (1,9): $\underline{b} \ \underline{c} \ d$

P1 (9,11,13,15): $a \ d$

P2 (12,13,14,15): $a \ b$

	1	9	11	12	13	14	15
P0	*	*					
P1		*	*		*		*
P2				*	*	*	*

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Si utilizzano criteri di essenzialità e dominanza per ridurre la complessità del problema.

Criterio di Essenzialità

È un criterio di scelta (aumenta l'insieme di copertura) e, di conseguenza, di semplificazione poiché identifica ed estrae gli implicant primi essenziali;

Criterio di Dominanza

È un criterio di sola semplificazione poiché riduce la dimensione della tabella di copertura eliminando righe (implicant/mintermini) o colonne (mintermini) senza operare alcuna scelta

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Criterio di Essenzialità:

Se una colonna contiene un solo 1, la riga che gli corrisponde è relativa ad un implicante primo essenziale (riga essenziale).

La riga essenziale e le colonne da essa coperte vengono eliminate dalla tabella. All'insieme di copertura viene aggiunto l'implicante identificato

	1	9	12	13	15	21	23	25
P0	*	*						*
P1		*			*	*		
P2			*	*	*			*
P3	*		*		*		*	
P4	*	*		*		*		

Insieme di copertura: $\emptyset$

	9	13	21	25
P0	*			*
P1	*		*	
P2		*		*
P4	*	*	*	

Insieme di copertura: { P3 }

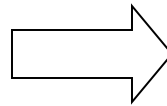
Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Criterio di dominanza di riga:

Un implicante i -esimo domina un implicante j -esimo quando P_i copre almeno tutti i mintermini coperti da P_j

P_j è eliminato dalla tabella (eliminazione della riga).

	9	13	21	25
P0	*			*
P1	*		*	
P2		*		*
P4	*	*	*	



	9	13	21	25
P0	*			*
P2		*		*
P4	*	*	*	

P4 domina P1

Insieme di copertura: { P3 }

Insieme di copertura: { P3 }

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

- L'eliminazione di una riga può generare dei nuovi implicanti essenziali;
- Le righe ad essi associate vengono chiamate righe essenziali secondarie (implicanti primi secondari).

	9	13	21	25
P0	*			*
P2		*		*
P4	*	*	*	

Insieme di copertura: { P3 }

	25
P0	*
P2	*

Insieme di copertura: { P3, P4 }

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Dominanza tra colonne:

Un mintermine i -esimo domina un mintermine j -esimo quando ogni implicante che copre m_i copre anche m_j

m_i è eliminato dalla tabella.

	9	13	21	25
P0	*			*
P1	*		*	
P2		*		*
P4	*	*	*	

9 domina 21

Insieme di copertura: { P3 }

	13	21	25
P0			*
P1		*	
P2	*		*
P4	*	*	

Insieme di copertura: { P3 }

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Quando tutte le righe essenziali e le colonne e righe dominate sono rimosse, la tabella ottenuta, se esiste, è ciclica: *tabella ciclica degli implicant primari*.

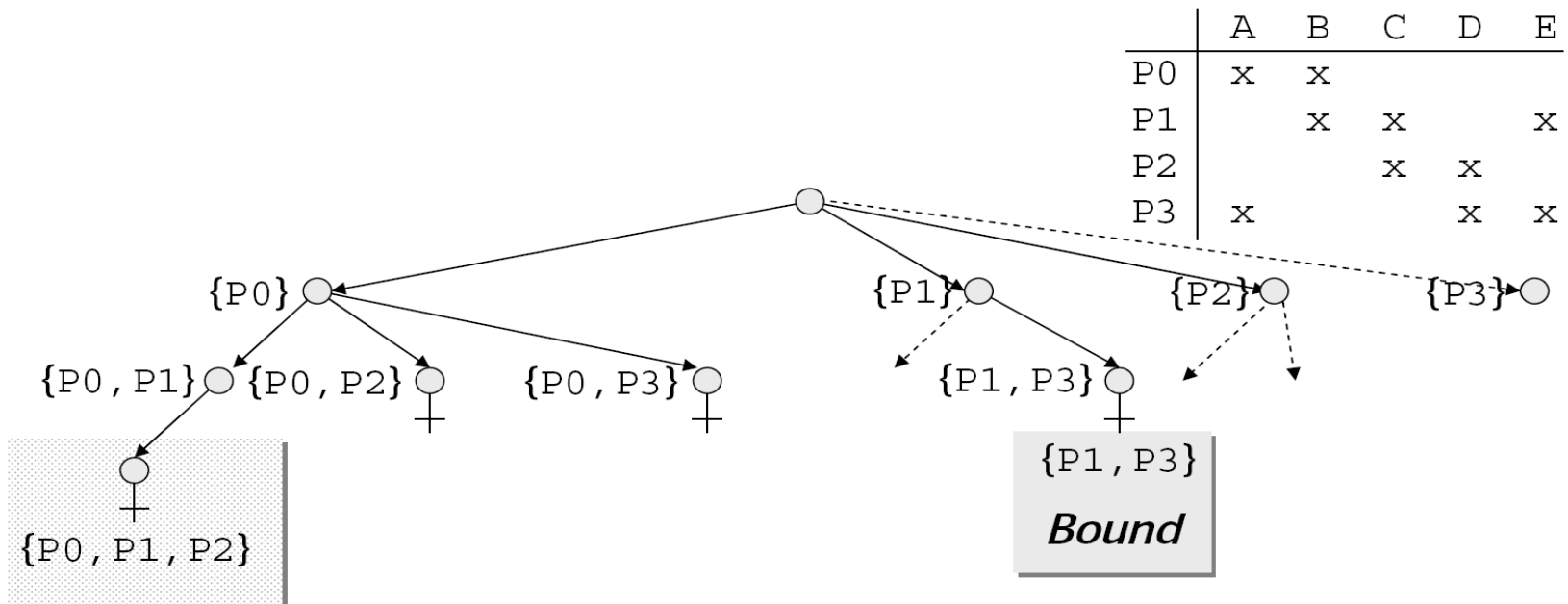
Per scegliere gli implicant si può effettuare una scelta arbitraria ed esaminare le conseguenze derivanti da tale scelta (branch and bound) e dalle sue alternative.

Branch and bound

1. Si sceglie un implicante primo P_i come appartenente alla soluzione e si elimina la riga corrispondente e le colonne coperte da P_i dalla tabella di copertura
2. La tabella ridotta viene esaminata per altre possibili semplificazioni (righe essenziali o relazioni di dominanza) che possono portare direttamente ad una soluzione finale S_i di costo C_i
3. Se la tabella ottenuta dalle semplificazioni, non è riducibile si sceglie un secondo implicante P_j tra quelli rimasti (considerando quindi come possibile copertura parziale la coppia $\{P_i, P_j\}$) iterando il procedimento di semplificazione e così via fino a coprire la funzione a costo C_i

Branch and bound

4. Una volta individuata una soluzione si risale nell'albero, per esaminare le scelte rimaste
5. Si mantiene sempre la soluzione a costo minore (bound) e si confronta il costo ottenuto con il costo minore, quando lo si supera quella soluzione viene abbandonata



Metodo di Quine-Mc Cluskey: funzioni non completamente specificate

Ricerca degli implicant primari:

Nel passo relativo alla generazione degli implicant primari, le condizioni di indifferenza sono trattate come 1.

Ricerca della copertura ottima:

Nella tabella di copertura compaiono, come indici di colonna, solo i mintermini relativi agli 1 della funzione

Metodo di Quine-Mc Cluskey: funzioni non completamente specificate

$$f(a,b,c,d) = \Sigma(0,2,12,13) + d(4,5)$$

0000	0	✓		00-0	0,2	
0010	2	✓		0-00	0,4	
0100	4	✓		010-	4,5	✓
0101	5	✓	⇒	-100	4,12	✓
1100	12	✓		-101	5,13	✓
1101	13	✓		110-	12,13	✓
						⇒ -10 - 4,5,12,13

$$P_0(0,2): \underline{abd}$$

$$P_1(0,4): \underline{acd}$$

$$P_2(4,5,12,13): b\underline{c}$$

	0	2	12	13
P ₀	*	*		
P ₁	*			
P ₂			*	*

P₀ e P₂ sono essenziali

$$f(a,b,c,d) = \underline{abd} + b\underline{c}$$