



# Esempi di minimizzazione mediante il metodo di Quine McCluskey

$$f(a,b,c,d) = \Sigma(0,1,4,5,13,14)$$

$G_0^0$	0000	0	✓
	<hr/>		
$G_1^0$	0001	1	✓
	<hr/>		
	0100	4	✓
	<hr/>		
$G_2^0$	0101	5	✓
	<hr/>		
$G_3^0$	1101	13	✓
	1110	14	

$G_0^1$	000-	0,1	✓
	<hr/>		
	0-00	0,4	✓
	<hr/>		
$G_1^1$	0-01	1,5	✓
	<hr/>		
	010-	4,5	✓
	<hr/>		
$G_2^1$	-101	5,13	

$$G_0^2 \quad 0-0- \quad 0,1,4,5$$

Il termine 14 non è riducibile, è un implicante primo

Il termine 5,13 non è riducibile, è un implicante primo

Il termine 0,1,4,5 non è riducibile, è un implicante primo

Gli implicanti primi della f sono:

$$P_0(14) = abc\underline{d}$$

$$P_1(5,13) = b\underline{c}d$$

$$P_2(0,1,4,5) = \underline{a}c$$

$$f(a,b,c,d) = \Sigma(0,1,4,5,13,14)$$

	0	1	4	5	13	14
P0						*
P1				*	*	
P2	*	*	*	*		

P0 è essenziale poiché è l'unico a coprire 14

P1 è essenziale poiché è l'unico a coprire 13

P2 è essenziale poiché è l'unico a coprire 0,1,4

$$f(a,b,c,d) = P0 + P1 + P2 = abcd + bcd + \underline{ac}$$

$$f(a,b,c,d) = \Sigma(0,2,4,5,6,7,8,9,13,15)$$

<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 10px;"><math>G_0^0</math></td><td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0000</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px 10px;">0010</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><math>G_1^0</math></td><td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0100</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px 10px;">1000</td><td style="padding: 2px 10px;">8</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td></td><td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0101</td><td style="padding: 2px 10px;">5</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><math>G_2^0</math></td><td style="padding: 2px 10px;">0110</td><td style="padding: 2px 10px;">6</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px 10px;">1001</td><td style="padding: 2px 10px;">9</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td></td><td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0111</td><td style="padding: 2px 10px;">7</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><math>G_3^0</math></td><td style="padding: 2px 10px;">1101</td><td style="padding: 2px 10px;">13</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><math>G_4^0</math></td><td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1111</td><td style="padding: 2px 10px;">15</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> </table>	$G_0^0$	0000	0	✓		0010	2	✓	$G_1^0$	0100	4	✓		1000	8	✓		0101	5	✓	$G_2^0$	0110	6	✓		1001	9	✓		0111	7	✓	$G_3^0$	1101	13	✓	$G_4^0$	1111	15	✓	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 10px;"><math>G_0^1</math></td><td style="padding: 2px 10px;">00-0</td><td style="padding: 2px 10px;">0,2</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px 10px;">0-00</td><td style="padding: 2px 10px;">0,4</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td></td><td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 10px;">-000</td><td style="padding: 2px 10px;">0,8</td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px 10px;">0-10</td><td style="padding: 2px 10px;">2,6</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><math>G_1^1</math></td><td style="padding: 2px 10px;">010-</td><td style="padding: 2px 10px;">4,5</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px 10px;">01-0</td><td style="padding: 2px 10px;">4,6</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td></td><td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 10px;">100-</td><td style="padding: 2px 10px;">8,9</td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px 10px;">01-1</td><td style="padding: 2px 10px;">5,7</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><math>G_2^1</math></td><td style="padding: 2px 10px;">-101</td><td style="padding: 2px 10px;">5,13</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px 10px;">011-</td><td style="padding: 2px 10px;">6,7</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td></td><td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1-01</td><td style="padding: 2px 10px;">9,13</td><td></td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><math>G_3^1</math></td><td style="padding: 2px 10px;">-111</td><td style="padding: 2px 10px;">7,15</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px 10px;">11-1</td><td style="padding: 2px 10px;">13,15</td><td style="padding: 2px 10px;">✓</td></tr> </table>	$G_0^1$	00-0	0,2	✓		0-00	0,4	✓		-000	0,8			0-10	2,6	✓	$G_1^1$	010-	4,5	✓		01-0	4,6	✓		100-	8,9			01-1	5,7	✓	$G_2^1$	-101	5,13	✓		011-	6,7	✓		1-01	9,13		$G_3^1$	-111	7,15	✓		11-1	13,15	✓	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 10px;"><math>G_0^2</math></td><td style="padding: 2px 10px;">0--0</td><td style="padding: 2px 10px;">0,2,4,6</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><math>G_1^2</math></td><td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 10px;">01--</td><td style="padding: 2px 10px;">4,5,6,7</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><math>G_2^2</math></td><td style="padding: 2px 10px;">-1-1</td><td style="padding: 2px 10px;">5,7,13,15</td></tr> </table> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">Implicanti primi</p>	$G_0^2$	0--0	0,2,4,6	$G_1^2$	01--	4,5,6,7	$G_2^2$	-1-1	5,7,13,15
$G_0^0$	0000	0	✓																																																																																																				
	0010	2	✓																																																																																																				
$G_1^0$	0100	4	✓																																																																																																				
	1000	8	✓																																																																																																				
	0101	5	✓																																																																																																				
$G_2^0$	0110	6	✓																																																																																																				
	1001	9	✓																																																																																																				
	0111	7	✓																																																																																																				
$G_3^0$	1101	13	✓																																																																																																				
$G_4^0$	1111	15	✓																																																																																																				
$G_0^1$	00-0	0,2	✓																																																																																																				
	0-00	0,4	✓																																																																																																				
	-000	0,8																																																																																																					
	0-10	2,6	✓																																																																																																				
$G_1^1$	010-	4,5	✓																																																																																																				
	01-0	4,6	✓																																																																																																				
	100-	8,9																																																																																																					
	01-1	5,7	✓																																																																																																				
$G_2^1$	-101	5,13	✓																																																																																																				
	011-	6,7	✓																																																																																																				
	1-01	9,13																																																																																																					
$G_3^1$	-111	7,15	✓																																																																																																				
	11-1	13,15	✓																																																																																																				
$G_0^2$	0--0	0,2,4,6																																																																																																					
$G_1^2$	01--	4,5,6,7																																																																																																					
$G_2^2$	-1-1	5,7,13,15																																																																																																					

Implicanti Primi: P0(0,8)=bcd      P1(8,9)=abc      P2(9,13)=acd

P3(0,2,4,6)=ad      P4(4,5,6,7)=ab      P5(5,7,13,15)=bd

$$f(a,b,c,d) = \Sigma(0,2,4,5,6,7,8,9,13,15)$$

	0	2	4	5	6	7	8	9	13	15
P0	*						*			
P1							*	*		
P2								*	*	
P3	*	*	*		*					
P4			*	*	*	*				
P5				*		*			*	*

P3 è essenziale poiché è l'unico a coprire 2

P5 è essenziale poiché è l'unico a coprire 15

Vengono eliminate le righe P3 e P5

Insieme iniziale di copertura={P3,P5}



	8	9
P0	*	
P1	*	*
P2		*
P4		

P1 domina P0 e P2  
Vengono eliminate P0 e P2



P1

	8	9
P1	*	*

Insieme di copertura {P1,P3,P5}



$$f(a,b,c,d) = P1 + P3 + P5 = \underline{abc} + \underline{ad} + bd$$

$$f(a,b,c,d) = \Sigma(0,2,8,10,11) + d(4,6,7)$$

$G_0^0$	0000	0	✓				
	0010	2	✓	$G_0^1$	00-0	0,2	✓
	0100	4	✓		0-00	0,4	✓
$G_1^0$	1000	8	✓		-000	0,8	✓
	0110	6	✓		0-10	2,6	✓
$G_2^0$	1010	10	✓	$G_1^1$	-010	2,10	✓
	0111	7	✓		01-0	4,6	✓
$G_3^0$	1011	11	✓		10-0	8,10	✓
				$G_2^1$	011-	6,7	
					101-	10,11	

$G_0^2$	0--0	0,2,4,6
$G_1^2$	-0-0	0,2,8,10

Implicanti primi

Implicanti Primi:

$$P0(6,7) = \underline{a}bc$$

$$P1(10,11) = \underline{a}bc$$

$$P2(0,2,4,6) = \underline{a}d$$

$$P3(0,2,8,10) = \underline{b}d$$

$$f(a,b,c,d) = \Sigma(0,2,8,10,11) + d(4,6,7)$$

	0	2	8	10	11
P0					
P1				*	*
P2	*	*			
P3	*	*	*	*	

P0 non copre termini di  $\Sigma$

P1 è essenziale poiché è l'unico a coprire 11

P3 è essenziale poiché è l'unico a coprire 8

Poiché P1 e P3 coprono tutti gli 1 di f, l'insieme di copertura è {P1,P3}

$$f(a,b,c,d) = P1 + P3 = \underline{abc} + \underline{bd}$$

# Ricerca della copertura minima

## Esempio 1

Consideriamo la seguente tabella degli implicanti primi:

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$	$\zeta$	$\eta$
P1	*	*		*			
P2		*				*	
P3			*		*		*
P4	*	*				*	
P5		*		*	*	*	

P3 è essenziale poiché è l'unico a coprire i mintermini  $\gamma$  e  $\eta$ .

Dalla tabella degli implicanti primi vengono eliminati P3 e i mintermini coperti da esso.

Insieme di copertura: {P3}



	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\zeta$
P1	*	*	*	
P2		*		*
P4	*	*		*
P5		*	*	*

P4 domina P2

P2 può essere eliminato

Insieme di copertura: {P3}

# Ricerca della copertura minima

## Esempio 1

	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\zeta$
P1	*	*	*	
P4	*	*		*
P5		*	*	*



$\beta$  domina gli altri mintermini quindi può essere eliminato

Insieme di copertura: {P3}

	$\alpha$	$\delta$	$\zeta$
P1	*	*	
P4	*		*
P5		*	*

La tabella degli implicanti primi è ciclica

Per coprire  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\zeta$  abbiamo tre possibili coperture:  
(P1, P4) oppure (P1, P5) oppure (P4, P5)

Se ad esempio P1 ha il maggior numero di letterali,  
la copertura minima sarà {P3, P4, P5}

# Ricerca della copertura minima

## Esempio 2

Consideriamo la seguente tabella degli implicanti primi:

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$	$\zeta$
P1	*	*				
P2		*		*	*	
P3		*				*
P4			*		*	
P5	*			*		*

P4 è essenziale poiché è l'unico a coprire  $\gamma$ .

Dalla tabella degli implicanti primi vengono eliminati P4 e i mintermini coperti da esso.

Insieme di copertura: {P4}

	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\zeta$
P1	*	*		
P2		*	*	
P3		*		*
P5	*		*	*

La tabella degli implicanti primi è ciclica

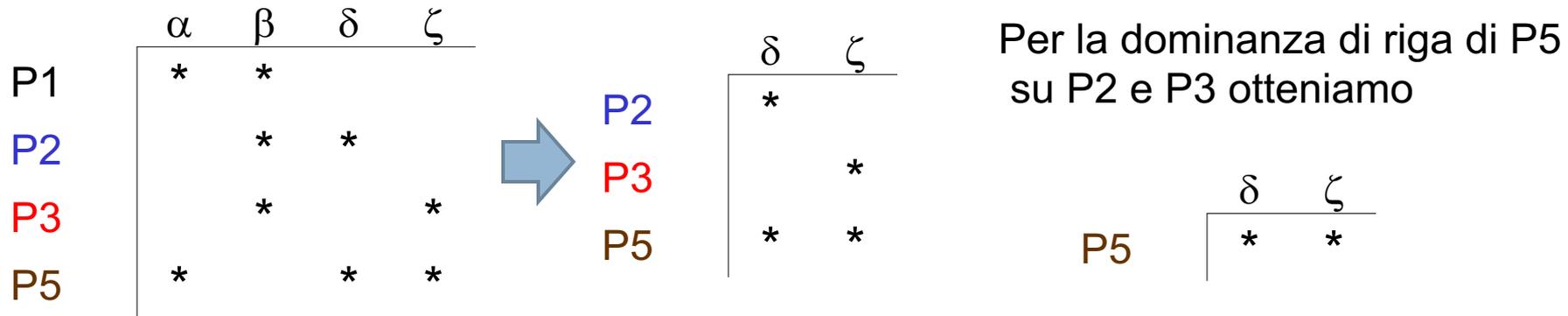
Insieme di copertura: {P4}

# Ricerca della copertura minima

## Esempio 2

Applichiamo il metodo del branch & bound per trovare gli altri implicanti da aggiungere a P4

Se partiamo da P1, semplifichiamo la tabella eliminando P1 e i relativi mintermini



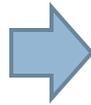
Otteniamo come Insieme di copertura  $\{P4, P1, P5\}$

# Ricerca della copertura minima

## Esempio 2

Se partiamo da P2, semplifichiamo la tabella eliminando P2 e i relativi mintermini

	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\zeta$
P1	*	*		
P2		*	*	
P3		*		*
P5	*		*	*



P1  
P3  
P5

$\alpha$	$\zeta$
*	
	*
*	*

Per la dominanza di riga di P5 su P1 e P3 otteniamo

P5

$\alpha$	$\zeta$
*	*

Otteniamo come Insieme di copertura  $\{P4, P2, P5\}$  che non migliora la soluzione trovata precedentemente

# Ricerca della copertura minima

## Esempio 2

Se partiamo da P5, semplifichiamo la tabella eliminando P5 e i relativi mintermini

	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\zeta$		$\beta$
P1	*	*			P1	*
P2		*	*		P2	*
P3		*		*	P3	*
P5	*		*	*		

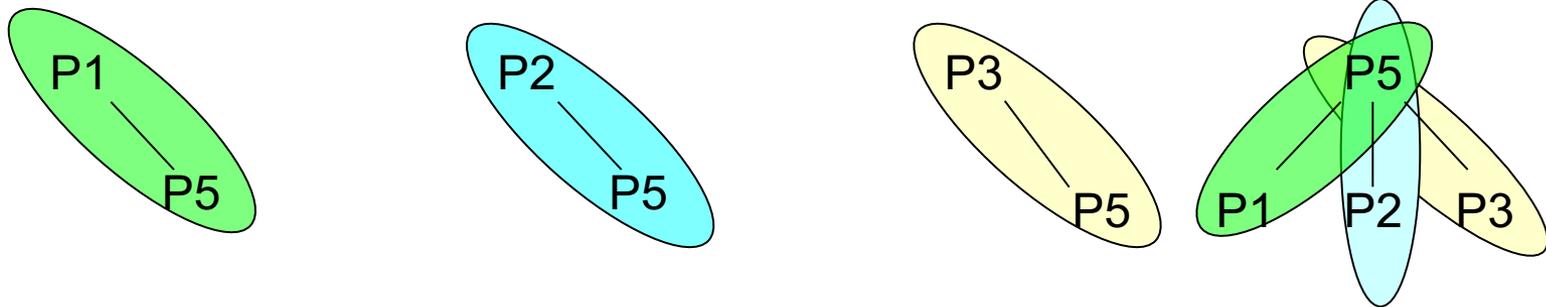
Per coprire il mintermine  $\beta$  si sceglie uno tra P1, P2 e P3

Otteniamo ancora una volta un insieme di copertura che non migliora la soluzione trovata precedentemente

# Ricerca della copertura minima

## Esempio 2

Applicando il metodo del branch & bound per trovare gli altri implicanti da aggiungere a P4 otteniamo dunque le seguenti coperture



Abbiamo 3 possibili coperture

Se P1, P2 e P3 hanno uguale numero di letterali la copertura dovrà contenere oltre a P4 e P5, uno qualsiasi tra P1, P2 e P3.

In caso contrario, la copertura dovrà contenere, oltre a P4 e P5, l'implicante (tra P1, P2 e P3) con il minor numero di letterali.

# Ricerca della copertura minima

## Esempio 3

Consideriamo la seguente tabella degli implicanti primi:

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$	$\zeta$
P1	*	*				
P2				*	*	
P3			*			*
P4		*				*
P5	*		*		*	*

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\zeta$
P1	*	*		
P3			*	*
P4		*		*
P5	*		*	*

P2 è essenziale poiché è l'unico a coprire  $\delta$ .

Dalla tabella degli implicanti primi vengono eliminati P2 e i mintermini coperti da esso.

Insieme di copertura: {P2}

P5 domina P3

P3 può essere eliminato

Insieme di copertura: {P2}

# Ricerca della copertura minima

## Esempio 3

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\zeta$
P1	*	*		
P4		*		*
P5	*		*	*

P2 è un implicante essenziale secondario poiché è l'unico a coprire  $\gamma$ .

Dalla tabella degli implicanti primi vengono eliminati P5 e i mintermini coperti da esso.

Insieme di copertura: {P2,P5}

	$\beta$
P1	*
P4	*

Se P1 e P4 hanno lo stesso numero di letterali, uno qualsiasi dei due può essere scelto.

Altrimenti, verrà scelto quello con il minor numero di letterali.