Minimizzazione degli Stati in una Rete Sequenziale Sincrona

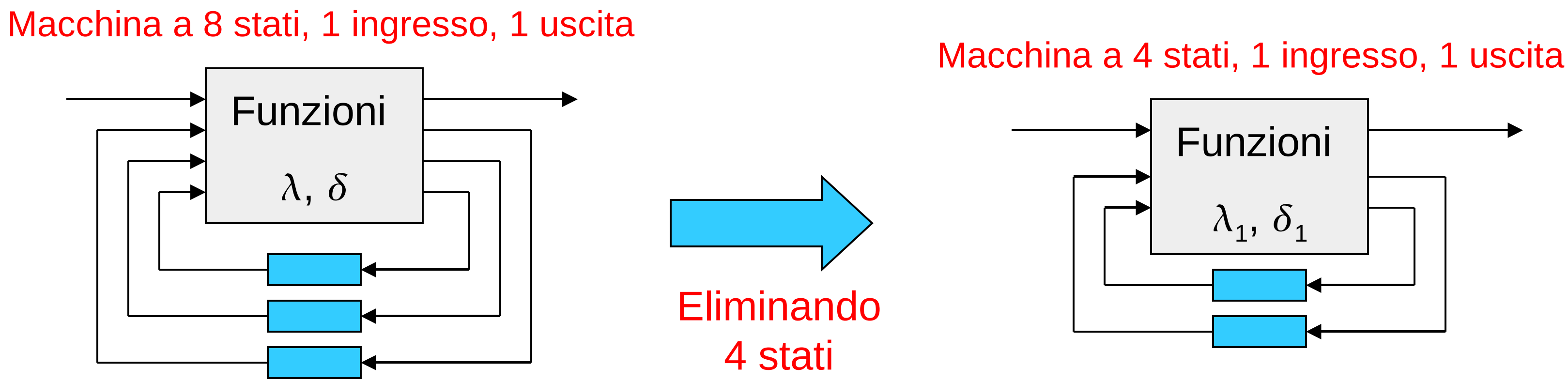
Maurizio Palesi

Sintesi di Reti Sequenziali Sincrone

- Il procedimento generale di sintesi si svolge nei seguenti passi:
  1. Realizzazione del diagramma degli stati a partire dalle specifiche del problema
  2. Costruzione della tabella degli stati
  3. **Minimizzazione del numero degli stati**
  4. Codifica degli stati interni
  5. Costruzione della tabella delle transizioni
  6. Scelta degli elementi di memoria
  7. Costruzione della tabella delle eccitazioni
  8. Sintesi sia della rete combinatoria che realizza la funzione stato prossimo sia di quella che realizza la funzione d’uscita

Motivazioni

- Il numero minimo di elementi di memoria necessari a memorizzare gli stati dell'insieme S è $N_{min} = \lceil \log_2 |S| \rceil$
- Nel modello di una macchina a stati possono esistere degli stati ridondanti
- L'identificazione ed eliminazione degli stati ridondanti comporta
  - ➔ Reti combinatorie meno costose
  - ➔ Minori elementi di memoria

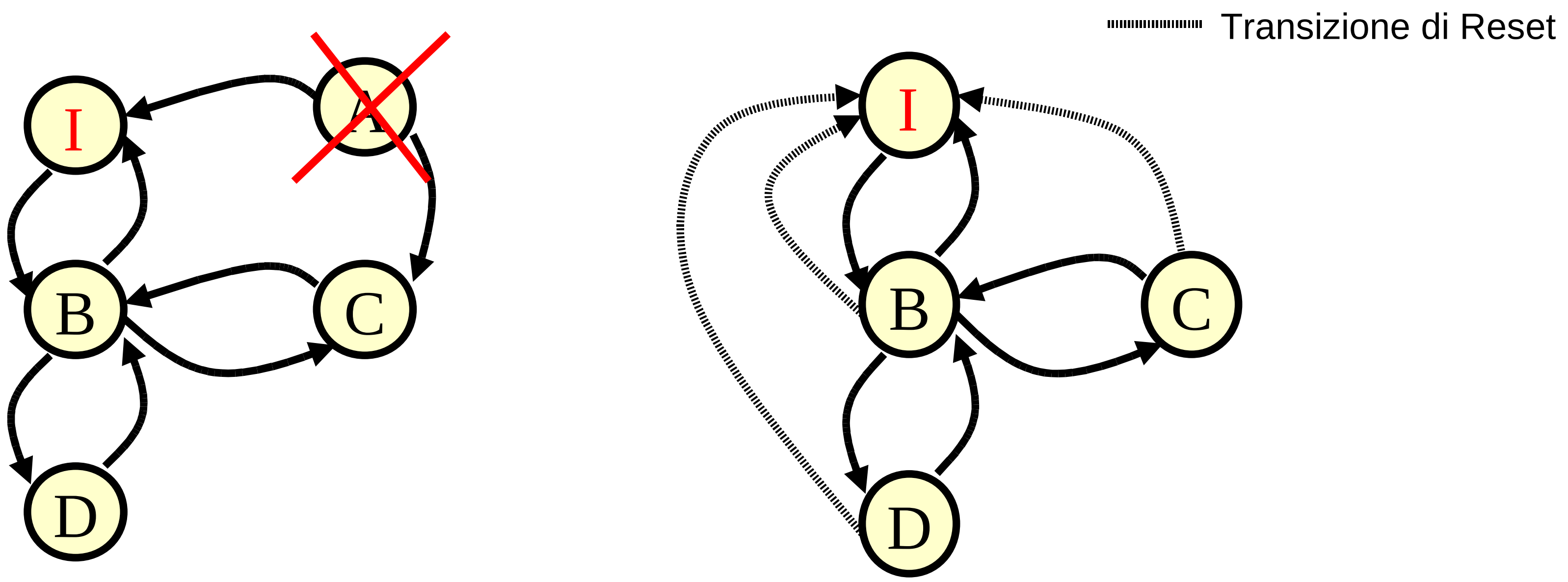


Obiettivi

- Obiettivo della riduzione del numero degli stati è l’individuazione di una macchina minima equivalente, ovvero funzionalmente equivalente e con il minimo numero di stati
- La riduzione viene realizzata in due fasi
  - Eliminazione degli stati non raggiungibili dallo stato iniziale
  - Identificazione degli stati
    - Equivalenti, per le macchine completamente specificate
    - Compatibili, per le macchine non completamente specificate

Stati Irraggiungibili

- Uno stato è irraggiungibile se non esiste alcuna sequenza di transizione di stato che porti dallo stato iniziale in tale stato



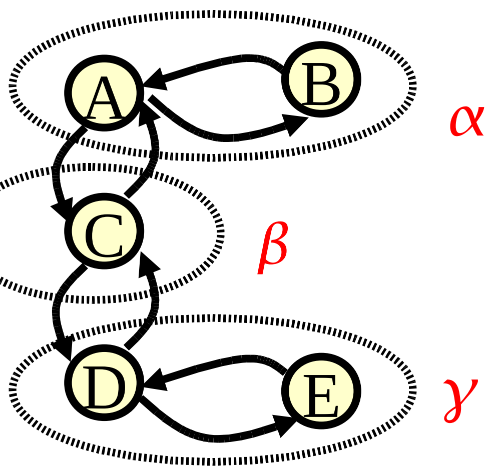
Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate
Definizioni

- Siano:
  - ➔ I_α una sequenza d' ingresso $\{i_j, \ldots, i_k\}$
  - ➔ U_α, sequenza d'uscita ad essa associata ottenuta attraverso λ
  - ➔ s_i, s_j due generici stati
- Due stati s_i e s_j appartenenti ad S sono *indistinguibili* se
  - ➔ $U_{\alpha,i}=\lambda(s_i, I_\alpha) = \lambda(s_j, I_\alpha) = U_{\alpha,j} \qquad \forall\ I_\alpha$

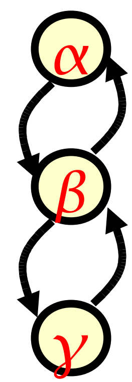
  Cioè se per qualsiasi sequenza di ingresso le uscite generate partendo da s_i o da s_j sono le stesse
- L'indistinguibilità tra s_i e s_j si indica con $s_i \sim s_j$
- La relazione di indistinguibilità gode di tre proprietà
  - ➔ Riflessiva: $s_i \sim s_i$
  - ➔ Simmetrica: $s_i \sim s_j \leftrightarrow s_j \sim s_i$
  - ➔ Transitiva: $s_i \sim s_j \wedge s_j \sim s_k \rightarrow s_i \sim s_k$

Classi di Stati Equivalenti

- Due stati indistinguibili sono equivalenti e possono essere sostituiti da un solo stato
- Un gruppo di stati tra loro equivalenti può essere raggruppato in un'unica classe
- L'insieme di classi individuate determina l'insieme di stati della macchina minima equivalente



A ~ B ; D ~ E



- La definizione di indistinguibilità è di difficile applicabilità poiché richiederebbe di considerare tutte le sequenze di ingresso
- Regola di Paull-Unger
  - Due stati sono s_i e s_j sono indistinguibili se e solo se
    - $\lambda(s_i,i) = \lambda(s_j,i)\ \forall\ i \in I$ ovvero le uscite sono uguali per tutti i simboli d'ingresso
    - $\delta(s_i,i) \sim \delta(s_j,i)\ \forall\ i \in I$ ovvero gli stati prossimi sono indistinguibili per tutti i simboli d'ingresso
- La regola è iterativa

Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate
Regola di Paull-Unger - Esempio

	0	1
a	d/0	b/1
b	e/0	b/1
c	a/1	c/1
d	b/1	c/0
e	a/1	c/0

a e **b** hanno la stessa uscita
se gli stati futuri **d** ed **e** sono indistinguibili, **a** ~ **b**

d ed **e** hanno la stessa uscita
se gli stati futuri **a** ed **b** sono indistinguibili, **d** ~ **e**

a non è indistinguibile da **c**,**d** ed **e** poiché ha una differente uscita

Poiché l'indistinguibilità tra **a** e **b** dipende da quella tra **d** ed **e** e viceversa, possiamo concludere che
a ~ **b**, **d** ~ **e**

Le classi di indistinguibilità sono:
α={a, b}, β={c}, γ={d, e}

Macchina minima equivalente

	0	1
α	γ /0	α/1
β	α /1	β /1
γ	α /1	β/0

- Poiché gli insiemi I ed S hanno cardinalità finita, dopo un numero finito di passi si verifica una delle due condizioni
  - $s_i \not\sim s_j$ se i simboli d'uscita sono diversi o gli stati prossimi sono distinguibili
  - $s_i \sim s_j$ se i simboli d'uscita sono uguali e gli stati prossimi sono indistinguibili

- Le relazioni di indistinguibilità possono essere identificate mediante la **Tabella delle Implicazioni**
  - Mette in relazione ogni coppia di stati
  - È triangolare (proprietà simmetrica) e priva di diagonale principale
- Ogni elemento della tabella contiene
  - Il simbolo di non equivalenza (X) o di equivalenza (~)
  - La coppia di stati a cui si rimanda la verifica, se non è possibile pronunciarsi sulla equivalenza degli stati corrispondenti

S1	x		
S2	x	~	
S3	S1,S2	x	x
	S0	**S1**	**S2**

- Per ogni coppia di stati
  - Se è marcata come equivalente non è richiesta una ulteriore verifica
  - Se si rimanda ad un’altra coppia
    - Se questi stati sono equivalenti anche gli stati della coppia in esame sono equivalenti
    - Se questi sono non equivalenti anche gli stati della coppia in esame sono non equivalenti
    - Se gli stati della coppia cui si rimanda dipendono da una coppia ulteriore si ripete il procedimento in modo iterativo
- L’analisi termina quando non sono più possibili eliminazioni
- Le coppie rimaste sono equivalenti

Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate

Regola di Paull-Unger - Tabella delle Implicazioni

	0	1
a	g/0	e/1
b	c/0	a/1
c	e/1	g/0
d	b/0	e/1
e	g/0	a/1
f	d/1	f/0
g	a/1	g/0

b	cg ae					
c	x	x				
d	bg	bc ae	x			
e	~	cg	x	bg ae		
f	x	x	de fg	x	x	
g	x	x	ae	x	x	ad
	a	b	c	d	e	f

Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate
Regola di Paull-Unger - Tabella delle Implicazioni

	a	b	c	d	e	f
b	cg ae					
c	x	x				
d	bg	bc ae	x			
e	~	cg	x	bg ae		
f	x	x	de fg	x	x	
g	x	x	ae	x	x	ad

Analisi delle coppie degli stati

b-a: c-g è indistinguibile se lo è a-e → b~a

d-a: b-g è distinguibile → d~a

d-b: b-c è distinguibile → d~b

e-b: c-g è indistinguibile se lo è a-e → b~e

e-d: b-g è distinguibile → e~d

f-c: d-e è indistinguibile se lo è b-g → f~c

g-c: a-e è indistinguibile → g~c

g-f: a-d è indistinguibile se lo è b-g → g~f

Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate
Regola di Paull-Unger - Tabella delle Implicazioni

b	~					
c	X	X				
d	X	X	X			
e	~	~	X	X		
f	X	X	X	X	X	
g	X	X	~	X	X	X
	a	b	c	d	e	f

Classi di indistinguibilità

α = {a,b,e}
β = {c,g}
γ = {d}
δ = {f}

Tabella degli stati minima equivalente

	0	1
α	β/0	α/1
β	α/1	β/0
γ	α/0	α/1
δ	γ/1	δ/0

Regola di Paull-Unger - Osservazioni

- Per le FSM completamete specificate l’algoritmo di Paull-Unger
  - Consente di identificare in maniera esatta la FSM minima equivalente
    - La partizione di equivalenza è unica (ogni stato appartiene ad una ed una sola classe)
  - Ha una complessità esponenziale con il numero di stati